

Lietuvos mokinių matematikos olimpiada  
Rajono (miesto) etapo užduotys 11 - 12 klasei  
2018 m.

**1 uždavinys.** Įrodykite, kad

- a) kiekvienas natūralusis skaičius  $a$ ;
- b) kiekvienas teigiamas racionalusis skaičius  $a$

yra lygus natūraliojo skaičiaus penktojo laipsnio ir natūraliojo skaičiaus trečiojo laipsnio santykiui, t. y. kad  $a = b^5 : c^3$ , kur  $b$  ir  $c$  yra natūralieji skaičiai.

**2 uždavinys.** Palei sieną išrikiuotos kelios pintinės su uogomis (daugiau nei viena pintinė, ir visos netuščios). Kairiausioje pintinėje yra  $a$  uogų, o kiekvienoje kitoje pintinėje – viena uoga daugiau nei gretimoje pintinėje iš kairės. Iš viso pintinėse yra 8668 uogos. Raskite visų galimų skaičiaus  $a$  natūraliųjų reikšmių sumą.

(Žinoma, kad  $8668 = 44 \cdot 197$ , kur skaičius 197 pirminis.)

**3 uždavinys.** Alfredas, Albertas ir Alvydas nusipirko šachmatų lentą ir lošia šachmatais, pasikeisdami pagal tokią taisyklę: dviem iš jų sulošus partiją, kitą iš eilės partiją lošia nugalėtojas ir likęs trečiasis žaidėjas. Vieną dieną Alfredas sulošė 15 partijų, Albertas – 14 partijų, o Alvydas – 9 partijas (lygiųjų nepasitaikė). Kas tą dieną lošė tryliktąją partiją? Kelias partijas Alvydas tą dieną laimėjo?

**4 uždavinys.** Lygiagretainio  $ABCD$  kraštinėje  $AB$  pažymėtas toks taškas  $E$ , kad  $BC + BE = CD$ . Lygiagretainio įstrižainės kertasi taške  $M$ . Atkarpos  $DE$  ir  $AM$  kertasi taške  $F$ . Įrodykite, kad  $2FM \cdot EA = FA \cdot EB$ .

**5 uždavinys.** Duoti natūralusis skaičius  $n$  ir pirminis skaičius  $p < 10\,000$ . Lygtis

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{n^p}$$

turi lygiai  $1009^{2018}$  natūraliųjų sprendinių  $(x, y)$ . Raskite visas galimas  $p$  reikšmes. (Skaičius 1009 yra pirminis.)

5 uždavinys vertinamas 7 taškais, kiekvienas iš likusių uždavinių vertinamas 5 taškais.