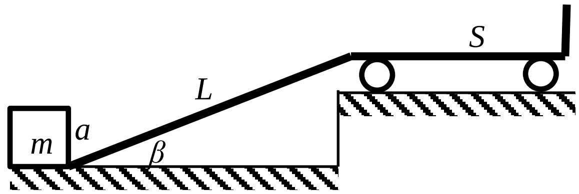
2017 m. Fizikos olimpiados II rato 11 klasės uždavinių sprendimai

1. Vienalytis masės m ir briaunos ilgio a kubas stovi prie pat ilgio $L = 4a$ nuožulnios plokštumos, kurios polinkio kampas $\beta = 30°$. Šia plokštuma kubas turi būti pakeltas į ilgio $S = 3a$ platformą ir pastatytas prie jos priekinės sienelės. Dėl didelės trinties krovikas perkelia kubą, versdamas jį per priekinę apatinę briauną. Kokį darbą atliks krovikas, pastatydamas kubą į jam skirtą vietą?



Sprendimas.

Kiekvienas vertimas paslenka kubą per a, vadinasi, reikia atlikti tokį vertimų skaičių:

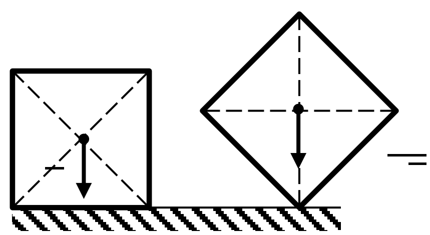
$N = \dfrac{L+S}{a} = 7.$ (1 taškas)

Visas darbas $A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6 + A_7$, (1 taškas)

čia A_i – darbas atliekamas vieno vertimo metu.

Judindamas kubą, krovikas kiekvieną kartą turi paversti jį taip, kad kubo sunkio jėga būtų nukreipta tiksliai į apatinę briauną, t. y. jo viena įstrižainė būtų vertikali. Po to kubas juda pats, atsitrenkdamas į pagrindą ir atiduodamas perteklinę energiją jam ir aplinkai (pagrindo drebėjimas, smūgio garsas ir t.t.). Dėl to atliktas darbas bus didesnis už kubui suteiktą mechaninę energiją. (1 taškas)

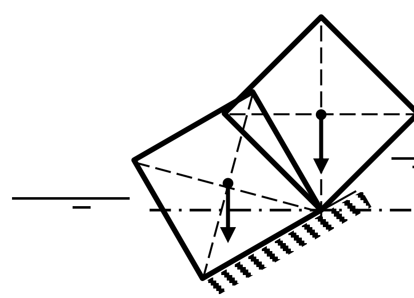
Pirmas kubo vertimas atliekamas iš horizontalios plokštumos.



Braižome brėžinį, nurodydami sunkio centro aukštį virš apatinės briaunos (kad būtų paprasčiau braižyti kubo paversta padėtis yra paslinkta). (1 taškas)

$A_1 = \dfrac{1}{2}mga\left(\sqrt{2}-1\right) \approx 0{,}207\,mga.$ (1 taškas)

Antras vertimas vykdomas, kai kubas yra ant nuožulniosios plokštumos. Braižome brėžinį. (1 taškas)



$A_2 = mga\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{\sin 15°}{\sqrt{2}}\right) \approx 0{,}524\,mga.$ (1 taškas)

Trečias, ketvirtas ir penktas vertimai atliekami nuožulnioje plokštumoje, vadinasi $A_2 = A_3 = A_4 = A_5$. (1 taškas)

Šeštas ir septintas vertimas atliekami ant horizontalios platformos, vadinasi $A_1 = A_6 = A_7$.

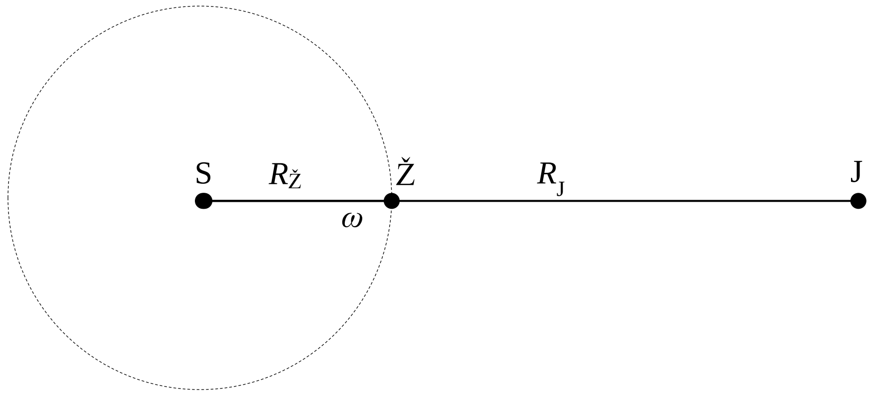
$A = 3 \cdot 0{,}207\,mga + 4 \cdot 0{,}524\,mga.$

$\boxed{A \approx 2{,}72\,mga.}$ (2 taškai)

2. Žemės orbitos spindulys $R_Ž = 1$ a. v., o Jupiterio $R_J = 5{,}2$ a. v. Kokiu periodiškumu Jupiteris, Žemė ir Saulė atsiduria maždaug vienoje tiesėje? Atsakymą išreikškite Žemės metais.

Sprendimas.

Spręsime uždavinį Jupiterio koordinačių sistemoje, kurioje Jupiteris nejuda aplink Saulę. Žemės kampinį greitį šioje sistemoje pažymėsime ω.



Braižome brėžinį. (2 taškai)

Tada ieškomas laikas

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \qquad \text{(1 taškas)}$$

Žemės kampinis greitis Jupiterio koordinačių sistemoje gal būti užrašytas per įprastinius Žemės ir Jupiterio kampinius greičius: $\omega = W_Ž - W_J$. (1 taškas)

Jie gali būti pakeisti apsisukimo periodais

$$\omega = \frac{2\pi}{T_Ž} - \frac{2\pi}{T_J}. \quad \omega = 2\pi\left(\frac{1}{T_Ž} - \frac{1}{T_J}\right). \qquad \text{(1 taškas)}$$

Žemės apsisukimo aplink Saulę periodas $T_Ž = 1$ metai. (1 taškas)

Jupiterio apsisukimo periodą rasime iš Keplerio dėsnio:

$$\frac{T_J^2}{T_Ž^2} = \frac{R_J^3}{R_Ž^3}, \qquad T_J = T_Ž\sqrt{\frac{R_J^3}{R_Ž^3}}. \qquad \text{(1 taškas)}$$

$$\omega = 2\pi\frac{1}{T_Ž}\left(1 - \sqrt{\frac{R_Ž^3}{R_J^3}}\right). \qquad \text{(1 taškas)}$$

$T = T_Ž\left(1 - \sqrt{\frac{R_Ž^3}{R_J^3}}\right)^{-1}.$
$T \approx 1{,}09$ metų.

(1 taškas)

(1 taškas)

3. Elektrinis arbatinukas, kurio galia $P = 2{,}1$ kW, užvirina $V = 1{,}4$ litro vandentiekio ($t = 9$ °C) vandens per laiką $\tau = 5{,}5$ min. Kam lygus arbatinuko naudingumo koeficientas? Vandens savitoji šiluma $c = 4{,}19$ kJ/kg·K.

Sprendimas.

Sutvarkome vienetus

$V = 1{,}4$ litro $= 1{,}4 \cdot 10^{-3}$ m^3, (1 taškas)

$\tau = 5{,}5$ min. $= 330$ s. (1 taškas)

Naudingo veikimo koeficientas

$$\eta = \frac{Q_{\text{naud}}}{Q_{\text{sunaud}}}. \qquad \text{(1 taškas)}$$

Q_{naud} - tai šilumos kiekis, reikalingas vandens sušildymui iki

virimo temperatūros $t_v = 100$°C. (1 taškas)

$Q_{\text{naud}} = V\rho c\ \ t_v - t$, (2 taškai)

čia $\rho = 1000$ kg/m^3 - vandens tankis.

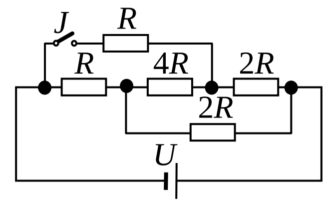
$Q_{\text{sunaud}} = P\tau$ - elektros energijos kiekis, sunaudotas arbatinuko veikimo metu.

$$\boxed{\eta = \frac{V\rho c\ \ t_v - t}{P\tau}.} \qquad \text{(2 taškai)}$$

$$\eta = \frac{1{,}4 \cdot 10^{-3} \cdot 1000 \cdot 4{,}19 \cdot 10^3\ \ 100 - 9}{2{,}1 \cdot 10^3 \cdot 330} = 0{,}77028. \qquad \text{(1 taškas)}$$

$\boxed{\eta = 77\ \%.}$ (1 taškas)

4. Penki rezistoriai sujungti į pav. parodytą grandinę, kuri prijungta prie idealaus įtampos U šaltinio. Raskite, kaip ir kiek kartų pakis šioje grandinėje išsiskirianti elektros galia įjungus jungiklį J.

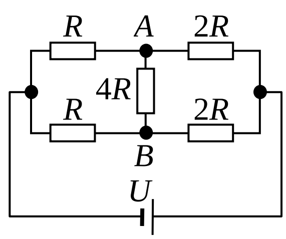


Sprendimas

Randame pilnutinę grandinės varžą, kai jungiklis yra išjungtas:

$$R_1 = R + \frac{2R(2R+4R)}{2R+2R+4R} = \frac{5}{2}R, \qquad \text{(2 taškai)}$$

todėl grandinėje išsiskirianti galia $P_1 = \dfrac{U^2}{R_1} = \dfrac{2}{5}\dfrac{U^2}{R}$. (1 taškas)



Įjungus jungiklį grandinės schemą galima perbraižyti, kaip parodyta paveiksle. (1 taškai)

Dėl grandinės simetrijos abiem varžos R rezistoriais teka vienodo stiprio srovės, todėl jiems tenka vienoda įtampa, taigi tarp mazgų A ir B įtampa (potencialų skirtumas) lygi 0. Tai reiškia, kad $4R$ rezistoriumi srovė neteka, taigi jo buvimas neturi jokios įtakos pilnutinei grandinės varžai, todėl jį galima tiesiog pašalinti. (2 taškai)

Dabar galime lengvai apskaičiuoti pilnutinę grandinės varžą:

$$R_2 = \frac{1}{2}(R+2R) = \frac{3}{2}R. \qquad \text{(2 taškai)}$$

(Pastaba: varžą R_2 galima apskaičiuoti ir kitais būdais, pvz., taikant Kirchhofo taisykles. Tokiu atveju už teisingą R_2 radimą skiriami visi 6 taškai).

Taigi dabar grandinėje išsiskiria galia $P_1 = \dfrac{U^2}{R_2} = \dfrac{2}{3}\dfrac{U^2}{R}$. (1 taškas)

Iš čia matome, kad įjungus jungiklį grandinėje išsiskirianti galia padidėja $\dfrac{P_2}{P_1} = \dfrac{5}{3}$ karto. (1 taškas)

5. Moksleivis lęšio pagalba sukūrė ekrane ryškų Saulės atvaizdą, kurio skersmuo $d = 8{,}00$ mm. Kam lygi lęšio optinė galia? Saulė matoma iš Žemės $\alpha = 0{,}5°$ kampu.

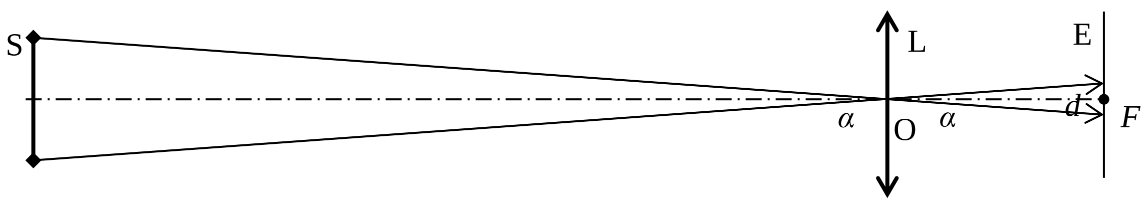
Sprendimas.

$\alpha = 0{,}5° = \dfrac{\pi}{360}$ rad. (1 taškas)

Lęšio optinė galia

$D = \dfrac{1}{F}$. (1 taškas)

Braižome Saulės atvaizdo sudarymo brėžinį. (2 taškai)



Saulė yra labai toli nuo Žemės, vadinasi jos atvaizdas susidaro lęšio židinio plokštumoje.

$\dfrac{d}{2F} = \mathrm{tg}\ \dfrac{\alpha}{2}$. (1 taškas)

Kampas α yra labai mažas, todėl

$\dfrac{d}{2F} = \mathrm{tg}\ \dfrac{\alpha}{2} \approx \sin\ \dfrac{\alpha}{2} \approx \dfrac{\alpha}{2}$. (1 taškas)

$\dfrac{1}{F} = \dfrac{\alpha}{d}$, arba $\dfrac{1}{F} = \dfrac{2}{d}\mathrm{tg}\ \dfrac{\alpha}{2}$ (1 taškas)

$\boxed{D = \dfrac{\alpha}{d}, \text{ arba } D = \dfrac{2}{d}\mathrm{tg}\ \dfrac{\alpha}{2}}$ (1taškas)

$\boxed{D = 1{,}09 \text{ dpt.}}$ (2 taškai)