Lietuvos mokinių matematikos olimpiada

Rajono (miesto) etapo užduotys 9 - 10 klasei

2017 m.

1 uždavinys. Kiek yra penkiaženklių skaičių $\overline{ab51c}$, kurie dalijasi iš 72?

2 uždavinys. Vienos kelionės metu traukinys 80 m ilgio tuneliu važiavo 8 sekundes, o vėliau 140 m ilgio tuneliu – 11 sekundžių. Nustatykite traukinio ilgį. (Traukinio greitis pastovus. Važiavimo tuneliu trukmė skaičiuojama nuo traukinio įvažiavimo į tunelį pradžios iki išvažiavimo iš tunelio pabaigos.)

3 uždavinys. Taškai M ir N yra atitinkamai trikampio ABC kraštinių AB ir AC vidurio taškai. Pusiaukraštinės BN ir CM yra statmenos. Raskite trikampio ABC plotą, jei žinoma, kad pusiaukraštinių BN ir CM ilgiai yra atitinkamai 8 ir 12.

4 uždavinys. Kiekviename 3×4 lentelės langelyje Sofija įrašė po vieną natūralųjį skaičių. Visi lentelėje įrašyti skaičiai yra skirtingi. Paaiškėjo, kad visų eilučių skaičių sumos yra tarpusavyje lygios ir visų stulpelių skaičių sumos yra tarpusavyje lygios. Visų lentelėje parašytų skaičių sumą pažymėkime s. Raskite visas įmanomas sumos s reikšmes, mažesnes už 130.

5 uždavinys. Raskite lygčių sistemos

$$\begin{cases} 26x^2 + 5y^2 + 29z^2 = 20xy + 4xz + 10yz, \\ x^3 + y^3 + z^3 = 1072 \end{cases}$$

visus realiuosius sprendinius (x, y, z).

Kiekvienas uždavinys vertinamas 5 taškais.

Lietuvos mokinių matematikos olimpiada
Rajono (miesto) etapo užduočių 9 - 10 klasei sprendimai
2017 m.

1 uždavinys. Kiek yra penkiaženklių skaičių $\overline{ab51c}$, kurie dalijasi iš 72?

Sprendimas. Kadangi $72 = 8 \cdot 9$, tai penkiaženklis skaičius $\overline{ab51c}$ dalijasi iš 9 ir iš 8. Skaičių $\overline{ab51c}$ galima išreikšti taip:

$$\overline{ab51c} = \overline{ab} \cdot 1000 + \overline{51c}.$$

Skaičiai $\overline{ab51c}$ ir 1000 dalijasi iš 8, todėl ir $\overline{51c}$ dalijasi iš 8. Iš dešimties galimų skaitmens c reikšmių tinka tik $c = 2$ (tada $512 = 8 \cdot 64$).

Remiantis dalumo iš 9 požymiu (natūralusis skaičius dalijasi iš 9 tada ir tik tada, kai jo skaitmenų suma dalijasi iš 9), skaitmenų suma $a+b+5+1+2 = 8+a+b$ dalijasi iš 9. Kita vertus, $7 < a+b+8 \leqslant 9+9+8 = 26$. Vadinasi, $a+b+8 = 9$ arba $a+b+8 = 18$ (tarp skaičių 7 ir 26 yra lygiai du skaičiaus 9 kartotiniai – 9 ir 18). Taigi $a+b = 1$ arba $a+b = 10$.

Jei $a+b = 1$, tai tinka tik $a = 1$ (tada $b = 0$; prisiminkime, kad pirmasis skaičiaus skaitmuo a nelygus 0). Jei $a+b = 10$, tai tinka $a = 1, 2, \ldots, 9$ (tada atitinkamai $b = 9, 8, \ldots, 1$).

Gautieji 10 skaičių 10512, 19512, 28512, 37512, 46512, 55512, 64512, 73512, 82512, 91512 dalijasi iš 72.

Ats.: 10.

2 uždavinys. Vienos kelionės metu traukinys 80 m ilgio tuneliu važiavo 8 sekundes, o vėliau 140 m ilgio tuneliu – 11 sekundžių. Nustatykite traukinio ilgį. (Traukinio greitis pastovus. Važiavimo tuneliu trukmė skaičiuojama nuo traukinio įvažiavimo į tunelį pradžios iki išvažiavimo iš tunelio pabaigos.)

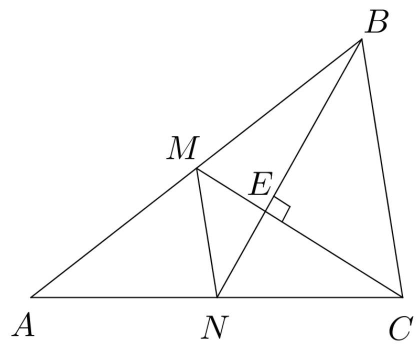
Sprendimas. Traukinio ilgį pažymėkime l m, o greitį – v m/s. Traukiniui važiuojant pirmuoju tuneliu, traukinio priekis nueina 80 m atstumą, išnyra iš tunelio, o tada nueina l m atstumą, kol iš tunelio išnyra visas tokio ilgio traukinys. Bendras nueitas atstumas lygus laiko ir greičio sandaugai: $80 + l = 8v$. Analogiškai gauname, kad $140 + l = 11v$. Belieka išspręsti dviejų tiesinių lygčių sistemą:

$$3v = 11v - 8v = (140 + l) - (80 + l) = 60, \qquad v = 20, \qquad l = 8v - 80 = 80.$$

Taigi traukinio ilgis yra 80 metrų.

Ats.: 80 m.

3 uždavinys. Taškai M ir N yra atitinkamai trikampio ABC kraštinių AB ir AC vidurio taškai. Pusiaukraštinės BN ir CM yra statmenos. Raskite trikampio ABC plotą, jei žinoma, kad pusiaukraštinių BN ir CM ilgiai yra atitinkamai 8 ir 12.



Pirmasis sprendimas. Pusiaukraštinių BN ir CM susikirtimo tašką pažymėkime E (žr. pav.). Remiantis pusiaukraštinių savybe (trikampio pusiaukraštinių susikirtimo taškas kiekvieną jo pusiaukraštinę dalija santykiu $2:1$, skaičiuojant nuo trikampio viršūnės), $BE : EN = 2 : 1$. Todėl $BE = \frac{2}{3}BN = \frac{2}{3} \cdot 8 = \frac{16}{3}$. Be to, BE yra trikampio MBC aukštinė, nes pusiaukraštinės BN ir CM yra statmenos. Taigi

$$S_{\triangle MBC} = \frac{1}{2}MC \cdot BE = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot \frac{16}{3} = 32.$$

Kita vertus, trikampio ABC aukštinės, nuleistos iš viršūnės C, ilgį pažymėję h, gauname

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 2MB \cdot h = 2S_{\triangle MBC} = 2 \cdot 32 = 64.$$

Antrasis sprendimas. Kadangi BE ir NE yra atitinkamai trikampių MBC ir MCN aukštinės, tai

$$S_{\triangle MBC} = \frac{1}{2}MC \cdot BE, \quad S_{\triangle MCN} = \frac{1}{2}MC \cdot NE.$$

Todėl

$$S_{\triangle MBC} + S_{\triangle MCN} = \frac{1}{2}MC \cdot (BE + NE) = \frac{1}{2}MC \cdot BN = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 8 = 48. \tag{1}$$

Kita vertus, trikampiai AMN ir ABC yra panašūs ($AM : AB = AN : AC = \frac{1}{2}$ ir kampas A yra bendras) su panašumo koeficientu $k = \frac{1}{2}$. Todėl

$$S_{\triangle AMN} = k^2 S_{\triangle ABC} = \frac{1}{4}S_{\triangle ABC}.$$

Iš čia ir iš (1) gauname

$$48 = S_{\triangle MBC} + S_{\triangle MCN} = S_{\triangle ABC} - S_{\triangle AMN} = S_{\triangle ABC} - \frac{1}{4}S_{\triangle ABC} = \frac{3}{4}S_{\triangle ABC}.$$

Vadinasi, $S_{\triangle ABC} = \frac{4}{3} \cdot 48 = 64$.

Ats.: 64.

4 uždavinys. Kiekviename 3×4 lentelės langelyje Sofija įrašė po vieną natūralųjį skaičių. Visi lentelėje įrašyti skaičiai yra skirtingi. Paaiškėjo, kad visų eilučių skaičių sumos yra tarpusavyje lygios ir visų stulpelių skaičių sumos yra tarpusavyje lygios. Visų lentelėje parašytų skaičių sumą pažymėkime s. Raskite visas įmanomas sumos s reikšmes, mažesnes už 130.

Sprendimas. Sofija 3×4 lentelėje iš viso įrašė 12 skirtingų natūraliųjų skaičių. Todėl $s \geqslant 1 + 2 + \cdots + 12 = 78$. Kadangi lentelė turi lygiai tris eilutes ir visų eilučių skaičių sumos yra tarpusavyje lygios, tai skaičus s dalijasi iš 3. Kita vertus, lentelėje iš viso yra keturi stulpeliai ir visų jų skaičių sumos yra tarpusavyje lygios. Todėl skaičius s dalijasi iš 4. Vadinasi, skaičius s dalijasi iš $3 \cdot 4 = 12$. Be to, $78 \leqslant s < 130$, todėl $s = 84$, 96, 108 arba 120.

Įrodysime, kad kiekviena iš šių reikšmių yra įmanoma. Iš tikrųjų, bet kurioje iš pateiktų lentelių turime $s = 84$. Likusius atvejus $s = 96$, 108 ir 120 galima gauti prie lentelės su $s = 84$ kiekvieno skaičiaus pridedant atitinkamai 1, 2 ir 3.

13	10	1	4
2	3	11	12
6	8	9	5

13	1	4	10
5	8	6	9
3	12	11	2

1	8	14	5
7	11	4	6
13	2	3	10

16	1	6	5
3	12	4	9
2	8	11	7

17	2	4	5
1	12	9	6
3	7	8	10

Pastaba. Jei lentelė su joje įrašytais skaičiais tenkina uždavinio sąlygą, tai sukeitus vietomis bet kurias dvi jos eilutes arba bet kuriuos du jos stulpelius, gaunama lentelė, kuri taip pat tenkina uždavinio sąlygą. Dar daugiau – visos lentelės, atitinkančios $s = 84$, gaunamos iš pateiktų penkių lentelių, keičiant vietomis jų eilutes arba stulpelius.

Ats.: 84, 96, 108, 120.

5 uždavinys. Raskite lygčių sistemos

$$\begin{cases} 26x^2 + 5y^2 + 29z^2 = 20xy + 4xz + 10yz, \\ x^3 + y^3 + z^3 = 1072 \end{cases}$$

visus realiuosius sprendinius (x, y, z).

Sprendimas. Kadangi

$$26x^2 + 5y^2 + 29z^2 - 20xy - 4xz - 10yz = (5x - 2y)^2 + (x - 2z)^2 + (y - 5z)^2,$$

tai pirmąją sistemos lygtį galime perrašyti taip:

$$(5x - 2y)^2 + (x - 2z)^2 + (y - 5z)^2 = 0.$$

Iš čia gauname $5x - 2y = x - 2z = y - 5z = 0$. Vadinasi, $x = 2z$ ir $y = 5z$. Šias išraiškas įrašę į antrąją sistemos lygtį, gauname $8z^3 + 125z^3 + z^3 = 1072$. Taigi $z = 2$. Dabar galime suskaičiuoti x ir y: $x = 2z = 4$, $y = 5z = 10$. Nesunku patikrinti, kad $(4, 10, 2)$ yra pradinės sistemos sprendinys.

Ats.: $\{x = 4, y = 10, z = 2\}$.