Lietuvos mokinių matematikos olimpiada
Rajono (miesto) etapo užduotys 11 - 12 klasei
2017 m.

1 uždavinys. Natūraliųjų n-ženklių skaičių, kurių dešimtainėje išraiškoje nėra skaitmens 2, bet yra bent vienas skaitmuo 1, kiekį pažymėkime a_n. a) Raskite skaičiaus a_6 dešimtainę išraišką. b) Įrodykite, kad $\sqrt{2a_7 - 16a_6}$ yra sveikasis skaičius.

2 uždavinys. Vienos kelionės metu traukinio kelyje pasitaikė du tuneliai. Pirmuoju jis važiavo 8 sekundes, o antruoju, kuris buvo 75% ilgesnis, jis važiavo 11 sekundžių. Kitas traukinys buvo 5% greitesnis už pirmąjį traukinį ir antruoju tuneliu važiavo 10 sekundžių. Raskite traukinių ilgių santykį. (Traukinių greičiai pastovūs. Važiavimo tuneliu trukmė skaičiuojama nuo traukinio įvažiavimo į tunelį pradžios iki išvažiavimo iš tunelio pabaigos.)

3 uždavinys. Apskritimo styga AB, kurios ilgis yra 10, statmena apskritimo skersmeniui CD ir kerta šį skersmenį taške E. Apskritimo viduje nubrėžti nelygūs apskritimai c_1 ir c_2, kurių skersmenys yra atitinkamai atkarpos CE ir DE. Šių dviejų apskritimų vidus nuspalvintas. Tiesė FG liečia c_1 ir c_2 atitinkamai (skirtinguose) taškuose F ir G. Raskite a) didžiojo skritulio nenuspalvintos dalies plotą; b) atkarpos FG ilgį.

4 uždavinys. Viename užsienio mieste viešojo transporto bilietas galioja 7 dienas arba 30 dienų. Bilietas atitinkamai kainuoja 7 Eur 3 ct arba 30 Eur. Studentas ketina mieste išbūti 3 metus, t. y. 1096 dienas, o viešuoju transportu naudotis kasdien. Kiek mažiausiai pinigų jis gali išleisti bilietams?

5 uždavinys. Natūralieji skaičiai a, m, n tenkina lygtį

$$(a^2 + 2)^m = (2a - 1)^n.$$

Raskite visas galimas skaičiaus a reikšmes.

Kiekvienas uždavinys vertinamas 5 taškais.

Lietuvos mokinių matematikos olimpiada

Rajono (miesto) etapo užduočių 11 - 12 klasei sprendimai

2017 m.

1 uždavinys. Natūraliųjų n-ženklių skaičių, kurių dešimtainėje išraiškoje nėra skaitmens 2, bet yra bent vienas skaitmuo 1, kiekį pažymėkime a_n. a) Raskite skaičiaus a_6 dešimtainę išraišką. b) Įrodykite, kad $\sqrt{2a_7 - 16a_6}$ yra sveikasis skaičius.

Sprendimas. a) Norint gauti šešiaženklį natūralųjį skaičių be skaitmens 2, pirmąjį skaitmenį galima pasirinkti bet kaip iš aštuonių skaitmenų 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, o kiekvieną iš likusių penkių skaitmenų – bet kaip iš devynių skaitmenų 0, 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Iš viso turime $8 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 8 \cdot 9^5 = 472\,392$ galimybes.

Dalyje taip gautų dešimtainių išraiškų skaitmuo 1 yra, o dalyje nėra. Kad gautume tokią išraišką, kurioje skaitmens 1 nėra, pirmąjį skaitmenį galime pasirinkti bet kaip iš septynių skaitmenų 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, o kiekvieną iš likusių penkių skaitmenų – bet kaip iš aštuonių skaitmenų 0, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Iš viso turime $7 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 = 7 \cdot 8^5 = 229\,376$ galimybes.

Tada išraiškų, kuriose yra skaitmuo 1, bet nėra skaitmens 2, yra $472\,392 - 229\,376 = {}$ $= 243\,016$.

b) Jau nustatėme, kad $a_6 = 8 \cdot 9^5 - 7 \cdot 8^5$. Analogiškai, $a_7 = 8 \cdot 9^6 - 7 \cdot 8^6$. Tada

$$2a_7 - 16a_6 = 16 \cdot 9^6 - 2 \cdot 7 \cdot 8^6 - 16 \cdot 8 \cdot 9^5 + 16 \cdot 7 \cdot 8^5 = 16 \cdot 9^5 \cdot (9-8) - 7 \cdot 8^5 \cdot (2 \cdot 8 - 16) =$$

$$= 16 \cdot 9^5 \implies \sqrt{2a_7 - 16a_6} = \sqrt{16 \cdot 9^5} = 4 \cdot 3^5.$$

Ats.: a) 243 016.

2 uždavinys. Vienos kelionės metu traukinio kelyje pasitaikė du tuneliai. Pirmuoju jis važiavo 8 sekundes, o antruoju, kuris buvo 75% ilgesnis, jis važiavo 11 sekundžių. Kitas traukinys buvo 5% greitesnis už pirmąjį traukinį ir antruoju tuneliu važiavo 10 sekundžių. Raskite traukinių ilgių santykį. (Traukinių greičiai pastovūs. Važiavimo tuneliu trukmė skaičiuojama nuo traukinio įvažiavimo į tunelį pradžios iki išvažiavimo iš tunelio pabaigos.)

Sprendimas. Pirmojo ir antrojo traukinių ilgius atitinkamai pažymėkime l_1 m ir l_2 m, o greičius – atitinkamai v_1 m/s ir v_2 m/s. Tunelių ilgius pažymėkime s_1 m ir s_2 m. Tada $v_2 = (1 + 0{,}05)v_1 = \frac{21}{20}v_1$ ir $s_2 = (1 + 0{,}75)s_1 = \frac{7}{4}s_1$.

Pirmajam traukiniui važiuojant pirmuoju tuneliu, traukinio priekis nueina s_1 m atstumą, išnyra iš tunelio, o tada nueina l_1 m atstumą, kol iš tunelio išnyra visas tokio ilgio traukinys. Bendras nueitas atstumas lygus laiko ir greičio sandaugai: $s_1 + l_1 = 8v_1$.

Analogiškai gauname, kad $s_2 + l_1 = 11v_1$ ir $s_2 + l_2 = 10v_2$. Atimkime pirmąją lygtį iš antrosios:

$$3v_1 = 11v_1 - 8v_1 = (s_2 + l_1) - (s_1 + l_1) = s_2 - s_1 = \frac{7s_1}{4} - s_1 = \frac{3s_1}{4} \implies s_1 = 4v_1.$$

Tada $l_1 = 8v_1 - s_1 = 4v_1$. Atimkime trečiąją lygtį iš antrosios:

$$\frac{v_1}{2} = 11v_1 - 10 \cdot \frac{21v_1}{20} = 11v_1 - 10v_2 = (s_2 + l_1) - (s_2 + l_2) = l_1 - l_2 = 4v_1 - l_2 \implies$$

$$l_2 = 4v_1 - \frac{v_1}{2} = 3{,}5v_1 \implies l_1 : l_2 = 4v_1 : 3{,}5v_1 = 8 : 7.$$

Ats.: 8 : 7.

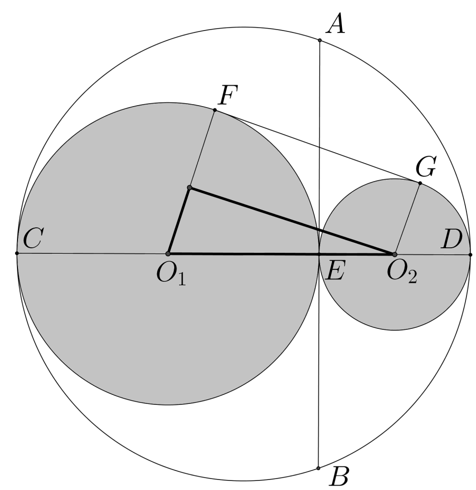
3 uždavinys. Apskritimo styga AB, kurios ilgis yra 10, statmena apskritimo skersmeniui CD ir kerta šį skersmenį taške E. Apskritimo viduje nubrėžti nelygūs apskritimai c_1 ir c_2, kurių skersmenys yra atitinkamai atkarpos CE ir DE. Šių dviejų apskritimų vidus nuspalvintas. Tiesė FG liečia c_1 ir c_2 atitinkamai (skirtinguose) taškuose F ir G. Raskite a) didžiojo skritulio nenuspalvintos dalies plotą; b) atkarpos FG ilgį.

Sprendimas. Apskritimai c_1 ir c_2 su centrais O_1 ir O_2 liečia vienas kitą, stygą AB ir didįjį apskritimą (žr. pav.). Skersmuo dalija statmeną stygą pusiau: $AE = AB : 2 = 5$. Trijų apskritimų skersmenis pažymėkime $2r_1 = CE$, $2r_2 = DE$ ir $2R = CD$. Tada $2R = CD = CE + DE = 2r_1 + 2r_2$. Kadangi CD yra skersmuo, tai trikampis CAD yra statusis. Pritaikykime Pitagoro teoremą trikampiams AEC, AED ir CAD:

$$AC^2 = AE^2 + CE^2 = 25 + 4r_1^2, \quad AD^2 = AE^2 + DE^2 = 25 + 4r_2^2,$$

$$4R^2 = CD^2 = AC^2 + AD^2 = (25 + 4r_1^2) + (25 + 4r_2^2) = 50 + 4r_1^2 + 4r_2^2,$$

$$2r_1r_2 = (r_1 + r_2)^2 - r_1^2 - r_2^2 = R^2 - r_1^2 - r_2^2 = 50 : 4 = 25/2.$$



Reiškinio r_1r_2 reikšmę galima gauti ir kitaip. Pvz., remiantis panašiųjų trikampių ACE ir DAE kraštinių santykių lygybe arba stygų savybe, pritaikyta AB ir CD: $AE \cdot BE = CE \cdot DE$.

a) Ieškomas plotas gaunamas iš didžiojo skritulio ploto atėmus mažesniųjų skritulių plotus: $S = \pi R^2 - \pi r_1^2 - \pi r_2^2 = \pi(R^2 - r_1^2 - r_2^2) = \frac{25\pi}{2}$.

b) Kadangi apskritimų spinduliai O_1F ir O_2G statmeni liestinei FG, tai O_1O_2GF yra stačioji trapecija ir ją galima padalyti į stačiakampį ir statųjį trikampį (žr. pav.; čia $r_1 > r_2$, priešingas atvejis analogiškas). Paryškinto trikampio vienas statinis lygus trapecijos aukštinei FG, o kitas – trapecijos pagrindų skirtumui $O_1F - O_2G = r_1 - r_2$. Trikampiui pritaikykime Pitagoro teoremą:

$$(r_1 + r_2)^2 = O_1O_2^2 = FG^2 + (r_1 - r_2)^2 \implies FG^2 = (r_1 + r_2)^2 - (r_1 - r_2)^2 = 4r_1r_2 = 25.$$

Taigi $FG = 5$. (Beje, atsakymas būtų tas pats, jei apskritimai c_1 ir c_2 būtų lygūs.)

Ats.: a) $\frac{25\pi}{2}$; b) 5.

4 uždavinys. Viename užsienio mieste viešojo transporto bilietas galioja 7 dienas arba 30 dienų. Bilietas atitinkamai kainuoja 7 Eur 3 ct arba 30 Eur. Studentas ketina mieste išbūti 3 metus, t. y. 1096 dienas, o viešuoju transportu naudotis kasdien. Kiek mažiausiai pinigų jis gali išleisti bilietams?

Sprendimas. Tarkime, kad studentas nusiperka a savaitinių ir b mėnesinių bilietų. Tada jis išleidžia $s = 7{,}03a + 30b$ eurų ir gali naudotis viešuoju transportu $t = 7a + 30b$ dienų. Reikia rasti mažiausią galimą s reikšmę, kai $t \geqslant 1096$. Nagrinėkime du atvejus.

1) Tarkime, kad $t = 1096$. Tada $s = t + 0{,}03a = 1096 + 0{,}03a$. Turime parinkti kuo mažesnę skaičiaus a reikšmę, tenkinačią lygtį $7a + 30b = 1096$. Skaičius $1096 - 7a$ turi dalytis iš 30. Tikrinant iš eilės reikšmes $a = 0, 1, 2, \ldots$, pirmoji tokia a reikšmė yra $a = 28$, tada $b = (1096 - 7 \cdot 28)/30 = 30$. Mažesnes a reikšmes galima greitai atmesti: skaičiaus $7a + 30b$, todėl ir $7a$ paskutinis skaitmuo yra 6, o taip bus, tik kai skaičiaus a paskutinis skaitmuo yra 8. Tai pastebėjus, užtenka patikrinti tik $a = 8$ ir $a = 18$. (Kitas būdas sumažinti perranką būtų pastebėti, kad $30b \leqslant 1096$, todėl $b \leqslant 36$. Mažiausia galima skaičiaus $7a = 1096 - 30b$ reikšmė yra pirmasis iš skaičių $1096 - 30 \cdot 36$, $1096 - 30 \cdot 35$, $1096 - 30 \cdot 34, \ldots$, kuris dalijasi iš 7. Tai yra skaičius $7a = 1096 - 30 \cdot 30 = 196$.)

Taigi $a \geqslant 28$ ir $s \geqslant 1096 + 0{,}03 \cdot 28 = 1096{,}84$. Pastaroji reikšmė įgyjama, kai $a = 28$, $b = 30$ (ir $t = 1096$). Taigi ji yra mažiausia galima, kai $t = 1096$.

2) Tarkime, kad $t > 1096$. Tada $s = t + 0{,}03a \geqslant t \geqslant 1097 > 1096{,}84$. Taigi šiuo atveju mažiausia galima s reikšmė yra didesnė nei pirmuoju atveju, jos ieškoti neverta.

Ats.: 1096,84 Eur.

5 uždavinys. Natūralieji skaičiai a, m, n tenkina lygtį

$$(a^2+2)^m = (2a-1)^n.$$

Raskite visas galimas skaičiaus a reikšmes.

Sprendimas. Nagrinėkime pirminį skaičiaus a^2+2 daliklį p. Iš jo dalijasi $(a^2+ +2)^m = (2a-1)^n$, todėl ir $2a-1$. Tada iš p dalijasi skaičius

$$(2a-1)^2 = 4a^2-4a+1 = 4(a^2+2)-(4a+7) = 4(a^2+2)-2(2a-1)-9$$

bei skaičius $9 = 4(a^2+2)-2(2a-1)-(2a-1)^2$ (iš p dalijasi kiekvienas iš trijų reiškinio narių). Vadinasi, $p = 3$. Kadangi skaičius a^2+2 neturi kitų pirminių daliklių be trejeto, tai jis yra trejeto laipsnis.

Jei q yra pirminis skaičiaus $2a-1$ daliklis, tai iš jo dalijasi $(a^2+2)^m = (2a-1)^n$, todėl ir a^2+2. Tada $q = 3$. Vadinasi, ir $2a-1$ yra trejeto laipsnis.

Pažymėkime $a^2+2 = 3^x$ ir $2a-1 = 3^y$ $(x, y \geqslant 0)$. Jei $\min(x, y) \geqslant 3$, tai a^2+2 ir $2a-1$ dalijasi iš $3^3 = 27$. Tačiau tokiu atveju $9 = 4(a^2+2)-2(2a-1)-(2a-1)^2$ dalijasi iš 27. Gavome prieštarą. Vadinasi, $\min(x, y) \leqslant 2$, ir vienas iš skaičių a^2+2 bei $2a-1$ lygus 1, 3 arba 9. Tada $a = 1$, 2 arba 5.

Jei $a = 1$, tai $3^m = 1^n = 1$, ir $m = 0$ nėra natūralusis skaičius. Jei $a = 2$, tai $a^2+2 = 6$ nėra trejeto laipsnis. Reikšmė $a = 5$ kartu su $m = 2$, $n = 3$ tenkina uždavinio sąlygą: $27^2 = 9^3$.

Ats.: 5.