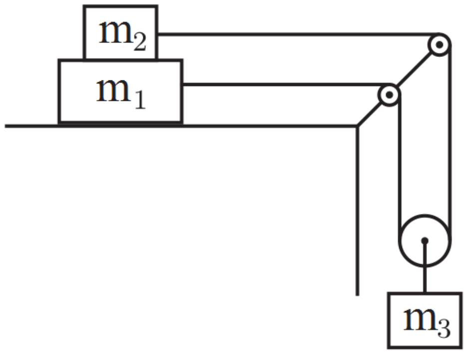
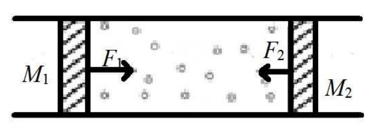
2014 m. Fizikos olimpiados II turo uždaviniai
12 klasė

1. Ant lygaus horizontalaus paviršiaus padėtas krovinėlis, kurio masė m_1, o ant jo uždėtas kitas krovinėlis, kurio masė m_2. Pasinaudojant skridinių sistema krovinėliai buvo sujungti nesvariu netąsiu siūlu (žiūr. pav.). Ant judančio skridinio buvo pakabintas krovinėlis, kurio masė $m_3 = m_1+m_2$. Kokiam masių m_1 ir m_2 santykiui esant krovinėliai neslys vienas kito paviršiumi? Trinties koeficientas tarp krovinėlių μ = 0,1. Skridinių masės ir trinties į juos bei trinties tarp horizontalaus paviršiaus ir krovinėlio nepaisyti.

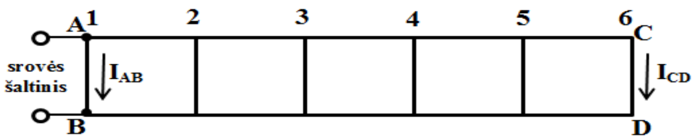


2. Kūnas paleidžiamas nuožulniąja plokštuma nuo papėdės į viršų, juda lėtėdamas, sustoja ir grįžta atgal į pradinį tašką. 1) Raskite trinties tarp kūno ir nuožulnios plokštumos koeficientą μ, jei kūno leidimosi laikas k = 1,3 karto didesnis už jo kilimo laiką, o nuožulnioji plokštuma su horizontu sudaro kampą α = 30º. 2) Rasti, kuri pradinės kūno kinetinės energijos dalis η virto šiluma kūnui judant plokštuma.

3. Labai ilgame vamzdelyje yra du stūmokliai, kurių masės $M_1 = M_2$ = 0,1 kg. Tarp stūmoklių yra ν = 0,1 molis azoto dujų. Stūmoklius vieną į kitą išilgai vamzdelio ašies spaudžia jėgos F_1 = 200 N ir F_2= 100 N. Koks bus atstumas L tarp stūmoklių, jei jie vamzdelyje juda be trinties? Dujų temperatūra pastovi ir lygi T = 361 K. Tarti, kad dujų masė daug mažesnė už stūmoklių mases.



4. Elektrinė grandinė (žiūr. pav.) yra sudaryta iš 16-kos vienodų laido segmentų (atkarpų). Grandinės segmento taškai A ir B yra prijungti prie nuolatinės srovės šaltinio. Kiekybiškai palyginkite srovės stiprį I_{AB} pirmajame vertikaliajame segmente (AB) ir srovės stiprį I_{CD} paskutiniame vertikaliajame grandinės segmente (CD).

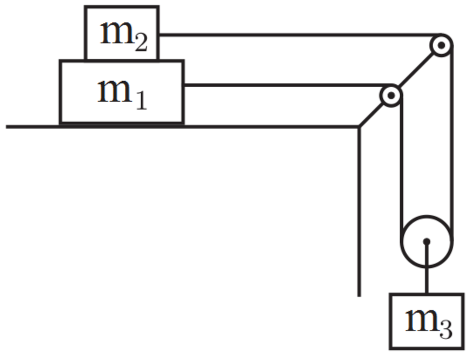


5. Viena akimi žmogus žiūri į stiklinį rutulį išilgai tiesės, einančios per rutulio centrą. Rutulio spindulys R = 0,2 m, lūžio rodiklis n = 1,5, atstumas nuo akies iki priekinio rutulio paviršiaus h = 0,2 m. Galine rutulio paviršiaus dalimi ropoja skruzdėlė. Pavaizduokite brėžinyje ir apskaičiuokite, kokiu didžiausiu atstumu r gali nutolti skruzdėlė nuo tiesės, einančios per rutulio centrą ir akies vyzdį, kad žmogus dar matytų ją per rutulį. Tarkite, kad skruzdė ir akies vyzdys maži ir gali būti vaizduojami tašku.

2014 m. Fizikos olimpiados II rato uždavinių sprendimai

12 klasė

1. Ant lygaus horizontalaus paviršiaus padėtas krovinėlis, kurio masė m_1, o ant jo uždėtas kitas krovinėlis, kurio masė m_2. Pasinaudojant skridinių sistema krovinėliai buvo sujungti nesvariu netąsiu siūlu (žiūr. pav.). Ant judančio skridinio buvo pakabintas krovinėlis, kurio masė $m_3 = m_1+m_2$. Kokiam masių m_1 ir m_2 santykiui esant krovinėliai neslys vienas kito paviršiumi? Trinties koeficientas tarp krovinėlių $\mu = 0,1$. Skridinių masės ir trinties į juos bei trinties tarp horizontalaus paviršiaus ir krovinėlio nepaisyti.



Sprendimas

$m_3 = m_1 + m_2$ (1)

Suprojektuojame kiekvieno kūno dinamines lygtis į *X* ir *Y* ašis:

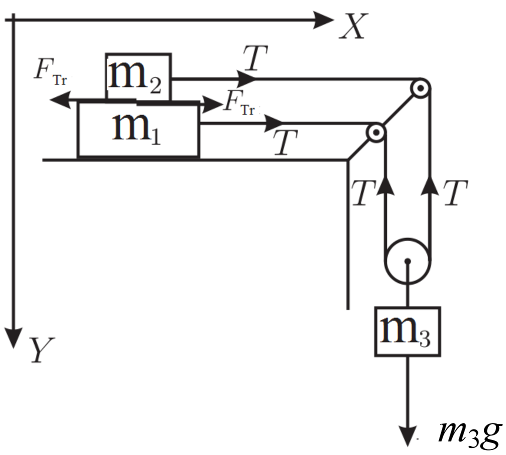
$m_1 a_1 = T \pm F_{\mathrm{Tr}}$; (2)

$m_2 a_2 = T \mp F_{\mathrm{Tr}}$; (3)

$m_3 a = (m_1 + m_2) g - 2T$. (4) (2 balai)

$\Delta Y = (\Delta x_1/2) + (\Delta x_2/2)$,

$2a = a_1 + a_2$. (1 balas)



Brėžinys (1 balas)

Jeigu krovinėliai neslysta vienas kito paviršiumi, tuomet:

$a_2 = a_1 = a$. (7) (1 balas)

Iš (1), (2), (3) ir (4) lygčių gauname, kad:

$a = \dfrac{g}{2}$; (8) (1 balas)

Iš (2) ir (3) lygčių skirtumo gauname:

$F_{\mathrm{Tr}} = \pm \dfrac{m_1 - m_2}{4} g$; (9) (1 balas)

Jeigu krovinėliai neslysta vienas kito paviršiumi, tai trinties jėga mažesnė už rimties trinties jėgą t.y.:

$F_{\mathrm{Tr}} < \mu m_2 g$; (10) (1 balas)

Jei ta jėga viršijama, kūnas pradės slysti (viena arba kita kryptimi), taigi, pagal (9) ir (10) išraiškas gauname:

$\left|\dfrac{(m_1 - m_2)g}{4}\right| \le \mu \cdot m_2 g$; (1 balas)

$1 - 4\mu \le \dfrac{m_1}{m_2} \le 4\mu + 1$. (1 balas)

Atsakymas: $0,6 \le \dfrac{m_1}{m_2} \le 1,4$.

2. Kūnas paleidžiamas nuožulniąja plokštuma nuo papėdės į viršų, juda lėtėdamas, sustoja ir grįžta atgal į pradinį tašką. 1) Raskite trinties tarp kūno ir nuožulnios plokštumos koeficientą μ, jei kūno leidimosi laikas k = 1,3 karto didesnis už jo kilimo laiką, o nuožulnioji plokštuma su horizontu sudaro kampą α = 30º. 2) Rasti, kuri pradinės kūno kinetinės energijos dalis η virto šiluma jam plokštuma pakilus ir nusileidus.

Sprendimas

1) Į viršų kūnas juda tolygiai lėtėdamas pagreičiu a, kurį lemia sunkio jėgos dedamoji ir trinties jėga, t.y. iš 2-ojo Niutono dėsnio išilgai nuožulnios plokštumos

$$ma = mg\sin\alpha + \mu mg\cos\alpha. \qquad (1) \qquad \text{(1 taškas)}$$

Nueitas kelias s lygus

$$s = \frac{at_1^2}{2}. \qquad (2) \qquad \text{(1 taškas)}$$

Čia t_1 – kūno kilimo laikas. Iš (1) ir (2) randame

$$s = \frac{gt_1^2(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{2}. \qquad (3) \qquad \text{(1 taškas)}$$

Žemyn kūnas juda tolygiai greitėdamas pagreičiu a'. Judant kūnui žemyn 2-asis Niutono dėsnis išilgai nuožulnios plokštumos atrodo taip:

$$ma' = mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha. \qquad (4) \qquad \text{(1 taškas)}$$

Nueitas kelias tas pats:

$$s = \frac{a't_2^2}{2}. \qquad (5) \qquad \text{(1 taškas)}$$

Čia t_2 – kūno leidimosi laikas. Iš (4) ir (5) randame

$$s = \frac{gt_2^2(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}{2}. \qquad (6) \qquad \text{(1 taškas)}$$

Iš (3) ir (6) lugčių ir laikų santykio $k = \frac{t_2}{t_1}$ randame

$$\mu = \frac{\mathrm{tg}\alpha(k^2 - 1)}{k^2 + 1} = 0{,}15. \qquad (7) \qquad \text{(1 taškas)}$$

2) Tegul kūno masė m, o pradinis greitis v. Tuomet pradinė kinetinė energija lygi $W = \frac{mv^2}{2}$.

Šiluma Q virto visas trinties jėgų darbas kūnui kylant ir leidžiantis, t.y.

$$Q = 2F_{tr}s, \qquad (8) \qquad \text{(1 taškas)}$$

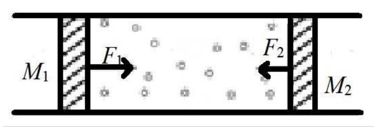
čia $F_{\mathrm{Tr}} = \mu mg\cos\alpha$,

s – kūno nueitas plokštuma kelias (tas pats kūnui judant į viršų ir į apačią).

Kūnas į viršų juda lėtėdamas pagreičiu $a = g\sin\alpha + \mu g\cos\alpha$ (žiūr. formulę (1)). Nueitas kelias judėjimui pastoviu pagreičiu lygus $s = \frac{v^2}{2a}$. Taigi, įrašę gautą pagreičio a išraišką į šią kelio formulę, o pastarąją į (8) kartu su trinties jėgos išraiška galiausiai gauname

$$Q = \frac{mv^2}{2}\cdot\frac{k^2 - 1}{k^2}, \text{ t.y. } \eta = \frac{k^2 - 1}{k^2} = 41\%. \qquad \text{(2 taškai)}$$

3. Labai ilgame vamzdelyje yra du stūmokliai, kurių masės $M_1 = M_2 = 0{,}1$ kg. Tarp stūmoklių yra $\nu = 0{,}1$ molis azoto dujų. Stūmoklius vieną į kitą išilgai vamzdelio ašies spaudžia jėgos $F_1 = 200$ N ir $F_2 = 100$ N. Koks bus atstumas L tarp stūmoklių, jei jie vamzdelyje juda be trinties? Dujų temperatūra pastovi ir lygi $T = 361$ K. Tarti, kad dujų masė daug mažesnė už stūmoklių mases.



Sprendimas

Stūmokliai kartu su suspaustomis dujomis judės vamzdelyje pastoviu pagreičiu *a:* (2 taškai)

$$(M_1 + M_2)a = F_1 - F_2 \text{ arba } a = \frac{F_1 - F_2}{M_1 + M_2}. \qquad (1)$$ (2 taškai)

Čia nekreipiamas dėmesys į dujų masę, nes ji daug mažesnė už stūmoklių mases.
Antrąjį Niutono dėsnį pirmam stūmokliui galima užrašyti taip:

$$M_1 a = F_1 - pS, \qquad (2)$$ (1 taškas)

čia p yra dujų slėgis, o S – vamzdelio skerspjūvio plotas.
Panašią lygtį galima užrašyti ir antram stūmokliui: $M_2 a = pS - F_2$. (2*) (1 taškas)
Pastaba: matyti, kad sudėjus lygtis (2) ir (2*), gaunama bendra judėjimo lygtis (1).
Ieškomas atstumas tarp stūmoklių L lygus

$$L = V/S, \qquad (3)$$ (1 taškas)

čia V – tarp stūmoklių esančių dujų tūris. Tūrį V randame, naudodami dujų būsenos lygtį:

$$V = \nu RT / p \qquad (4)$$ (1 taškas)

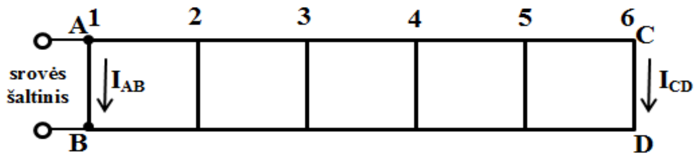
Dujų slėgį gausime į (2) įrašę pagreičio išraišką (1):

$$p = \frac{F_1 M_2 + F_2 M_1}{S(M_1 + M_2)} \qquad (5)$$ (1 taškas)

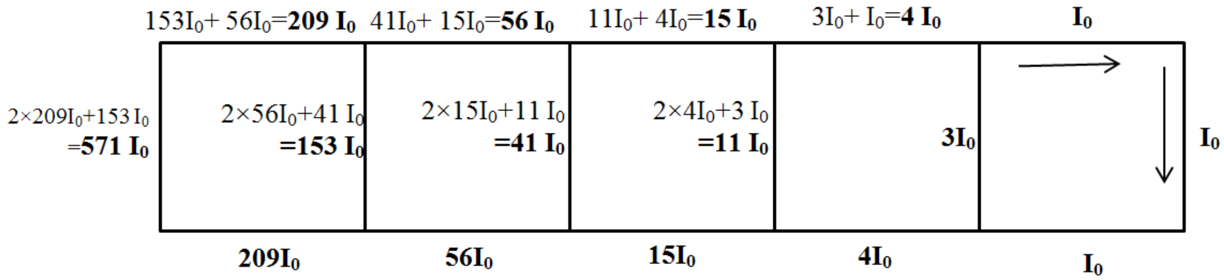
Įrašę (5) į (4), o rezultatą - į (3), gauname ieškomą atstumą tarp stūmoklių

$$L = \frac{\nu RT(M_1 + M_2)}{F_1 M_2 + F_2 M_1} = 2{,}0 \text{ m.}$$ (1 taškas)

4. Elektrinė grandinė (žiūr. pav.) yra sudaryta iš 16-kos vienodų laido segmentų (atkarpų). Grandinės segmento taškai A ir B yra prijungti prie nuolatinės srovės šaltinio. Kiekybiškai palyginkite srovės stiprį I_{AB} pirmajame vertikaliajame segmente (AB) ir srovės stiprį I_{CD} paskutiniame vertikaliajame grandinės segmente (CD).



Sprendimas:

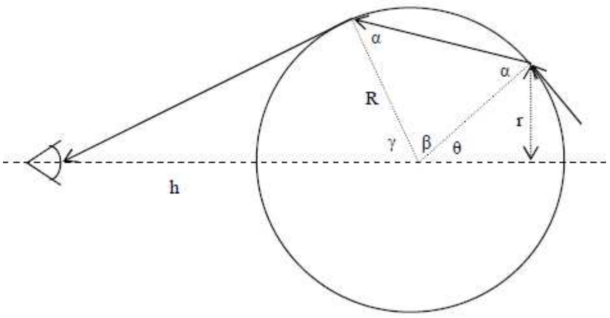


Grandinės analizę patogu pradėti nuo jos galo. Pažymėkime srovės stiprį paskutiniajame vertikaliajame grandinės segmente (nr. 6 arba CD) I_0, t.y.: $$I_6 = I_{5-6} = I_{5^*-6^*} = I_0; \qquad (1)$$ čia $I_{5^*-6^*}$ yra srovės stipris grandinės horizontaliajame segmente, esančiame priešais horizontalų segmentą 5-6, analogiškas žymėjimo principas naudojamas viso sprendimo metu.	(2 taškai)
5-to vertikalaus segmento įtampa yra 3 kartus didesnė nei 6-to vertikalaus segmento, t.y. srovės stipris: $I_5 = 3I_0$. (2)	(1 taškas)
Srovės stipris horizontaliajame segmente 4-5 yra lygus srovės stiprio horizontaliajame segmente 5-6 ir srovės stiprio vertikaliajame nr. 5 segmente sumai: $$I_{4-5} = I_{5-6} + I_5 = (3+1)I_0. \qquad (3)$$	(2 taškai)
4-to vertikalaus segmento įtampa lygi $U_4 = (2\cdot 4+3)I_0 \cdot R$ (čia R – vieno segmento varža). Iš čia išplaukia, kad: $I_4 = (2\cdot 4+3)I_0 = 11\cdot I_0$. (4)	(2 taškai)
Analogiškai gauname: $I_3 = (2\cdot 15+11)I_0 = 41\cdot I_0$; $I_2 = (2\cdot 56+41)I_0 = 153\cdot I_0$; $I_1 = (2\cdot 209+153)I_0 = 571\cdot I_0$. (5)	(2 taškai)
Tokiu būdu: $$k = \frac{I_{AB}}{I_{CD}} = \frac{I_1}{I_0} = \frac{571 I_0}{I_0} = 571. \qquad (6)$$ $k = 571$ kartų srovės stipris I_{AB} pirmajame vertikaliajame segmente (AB) yra didesnis lyginant su srovės stipriu I_{CD} paskutiniame vertikaliajame duotos schemos segmente.	(1 taškas)
Ats.: 571 kartų $I_{AB} > I_{CD}$.	

5. Viena akimi žmogus žiūri į stiklinį rutulį išilgai tiesės, einančios per rutulio centrą. Rutulio spindulys R = 0,2 m, lūžio rodiklis n = 1,5, atstumas nuo akies iki priekinio rutulio paviršiaus h = 0,2 m. Galine rutulio paviršiaus dalimi ropoja skruzdėlė. Pavaizduokite brėžinyje ir apskaičiuokite, kokiu didžiausiu atstumu r gali nutolti skruzdėlė nuo tiesės, einančios per rutulio centrą ir akies vyzdį, kad žmogus dar matytų ją per rutulį. Tarkite, kad skruzdė ir akies vyzdys maži ir gali būti vaizduojami tašku.

Sprendimas

Spindulys, dar patenkantis į akies vyzdį ir išeinantis iš objekto, esančio matomos per rutulį paviršiaus dalies krašte, eina išilgai liestinės priekiniam rutulio paviršiui (1 pav.).



Brėžinys – (4 taškai)

Brėžinyje matome, kad stataus trikampio kampo γ kosinusas

$$\cos\gamma = \frac{R}{R+h}. \qquad \text{(1 taškas)}$$

Iš lūžio dėsnio $\sin\alpha = \frac{1}{n}$. (1 taškas)

Lygiašonio trikampio kampas $\beta = \pi - 2\alpha = \pi - 2\arcsin\frac{1}{n}$. (1 taškas)

Kampas $\theta = \pi - \gamma - \beta = 2\arcsin\frac{1}{n} - \arccos\frac{1}{1+h/R}$. (1 taškas)

Didžiausias atstumas, kuriuo skruzdė gali nutolti nuo tiesės, einančios per rutulio centą ir vyzdį, lygus

$$r = R\sin\theta \qquad \text{(1 taškas)}$$

Taigi, $r = R\sin\left(2\arcsin\frac{1}{n} - \arccos\frac{1}{1+\frac{h}{R}}\right) = 0{,}2\sin\left(2\arcsin\frac{1}{1{,}5} - \arccos\frac{1}{1+\frac{0{,}2}{0{,}2}}\right) \approx 0{,}080 \text{ m}$.

(1 taškas)

Atsakymas:

$$r = R\sin\left(2\arcsin\frac{1}{n} - \arccos\frac{1}{1+\frac{h}{R}}\right) \approx 0{,}080 \text{ m}.$$