Lietuvos mokinių matematikos olimpiada
Savivaldybių etapo užduotys 9 - 10 klasei
2023 m.

1 uždavinys. Kiekviename 4×4 lentelės langelyje įrašytas vienas iš skaičių 1, 2, 3, 4. Jokie du skaičiai, esantys vienoje eilutėje arba viename stulpelyje, nėra lygūs. Paveikslėlyje parodyti penki įrašytieji skaičiai. Kiek yra tokių lentelių?

1			
2	1		
	3		
	4		

2 uždavinys. Agota lentoje užrašė natūraliuosius skaičius nuo 1 iki 13. Penkis iš šių skaičių ji padaugino iš 3, o likusius aštuonis padaugino iš 7. Ar gali visų gautų sandaugų suma būti lygi a) 435; b) 433?

3 uždavinys.

a) Stačiakampis $ABCD$ sudarytas iš kvadratų, kurių kiekvieno perimetras yra natūralusis skaičius. Ar būtinai stačiakampio $ABCD$ perimetras yra natūralusis skaičius?

b) Kvadratas $ABCD$ sudarytas iš mažesnių kvadratų, kurių kiekvieno perimetras yra natūralusis skaičius. Ar būtinai kvadrato $ABCD$ perimetras yra natūralusis skaičius?

4 uždavinys. Raskite lygčių sistemos

$$\begin{cases} x(y+z+1)=y^2+z^2-5, \\ y(z+x+1)=z^2+x^2-5, \\ z(x+y+1)=x^2+y^2-5 \end{cases}$$

visus sveikuosius sprendinius (x, y, z).

5 uždavinys. Duoti tokie natūralieji skaičiai a, b, x ir y, kad skaičius $ax+by$ dalijasi iš a^2+b^2. Įrodykite, kad skaičiai a^2+b^2 ir x^2+y^2 turi bendrą daliklį, didesnį už 1.

Kiekvienas uždavinys vertinamas 5 taškais.

Lietuvos mokinių matematikos olimpiada

Savivaldybių etapo užduočių 9 - 10 klasei sprendimai

2023 m.

1 uždavinys. Kiekviename 4×4 lentelės langelyje įrašytas vienas iš skaičių 1, 2, 3, 4. Jokie du skaičiai, esantys vienoje eilutėje arba viename stulpelyje, nėra lygūs. Paveikslėlyje parodyti penki įrašytieji skaičiai. Kiek yra tokių lentelių?

1			
2	1		
	3		
	4		

Sprendimas. Lentelės pirmame ir antrame stulpeliuose skaičiai gali būti įrašyti vieninteliu būdu (žr. pav.).

<table>
<tr><td>1</td><td>2</td><td rowspan="2">A</td></tr>
<tr><td>2</td><td>1</td></tr>
<tr><td>4</td><td>3</td><td rowspan="2">B</td></tr>
<tr><td>3</td><td>4</td></tr>
</table>

Kvadrato A skaičiai gali būti $\begin{matrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{matrix}$ arba $\begin{matrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{matrix}$, o kvadrate B skaičiai gali būti $\begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{matrix}$ arba $\begin{matrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{matrix}$ (žr. pav.). Nesunku įsitikinti, kad kiekviena iš tokių $2 \cdot 2 = 4$ lentelių tenkina uždavinio sąlygą.

Ats.: 4.

2 uždavinys. Agota lentoje užrašė natūraliuosius skaičius nuo 1 iki 13. Penkis iš šių skaičių ji padaugino iš 3, o likusius aštuonis padaugino iš 7. Ar gali visų gautų sandaugų suma būti lygi a) 435; b) 433?

Sprendimas. Visų skaičių, kuriuos Agota padaugino iš 3, sumą pažymėkime s. Tuomet visų skaičių, kuriuos Agota padaugino iš 7, suma lygi $1 + 2 + \cdots + 13 - s = 91 - s$.

a) Tarkime, kad visų gautų sandaugų suma lygi 435. Tuomet $3 \cdot s + 7 \cdot (91 - s) = 435$. Iš čia gauname, kad $s = \frac{101}{2} = 50{,}5$. Prieštara. Vadinasi, visų lentoje gautų skaičių suma negali būti lygi 435.

b) Tarkime, kad visų gautų sandaugų suma lygi 433. Tuomet $3 \cdot s + 7 \cdot (91 - s) = 433$. Iš čia gauname, kad $s = 51$. Taigi visų skaičių, kuriuos Agota padaugino iš 3, suma lygi 51. Pavyzdžiui, $5+10+11+12+13=51$. Iš tiesų Agota galėtų uždavinio sąlygoje nurodytu būdu padauginti skaičius iš 3 arba 7, kad sandaugų suma būtų lygi 433:

$$3 \cdot (5+10+11+12+13) + 7 \cdot (1+2+3+4+6+7+8+9) = 433.$$

Ats.: a) ne; b) taip.

3 uždavinys.

a) Stačiakampis $ABCD$ sudarytas iš kvadratų, kurių kiekvieno perimetras yra natūralusis skaičius. Ar būtinai stačiakampio $ABCD$ perimetras yra natūralusis skaičius?

b) Kvadratas $ABCD$ sudarytas iš mažesnių kvadratų, kurių kiekvieno perimetras yra natūralusis skaičius. Ar būtinai kvadrato $ABCD$ perimetras yra natūralusis skaičius?

Sprendimas. a) Nebūtinai. Imkime du vienodus kvadratus, kurių kraštinės ilgis lygus $\frac{1}{4}$. Kiekvieno iš jų perimetras lygus $4 \cdot \frac{1}{4} = 1$. Iš šių kvadratų sudarykime stačiakampį, kurio kraštinių ilgiai yra $\frac{1}{4}$ ir $2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$. Tokio stačiakampio perimetras lygus $2 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{2} = 1{,}5$.

b) Būtinai. Nagrinėkime visus mažesniuosius kvadratus, kurių viena kraštinė yra kvadrato $ABCD$ kraštinėje AB. Jų kraštinių ilgius pažymėkime $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Tada $AB = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Remiantis uždavinio sąlyga, atitinkami perimetrai $4a_1, 4a_2, \ldots, 4a_n$ yra natūralieji skaičiai. Todėl ir kvadrato $ABCD$ perimetras

$$4AB = 4(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = 4a_1 + 4a_2 + \cdots + 4a_n$$

yra natūralusis skaičius.

Ats.: a) ne; b) taip.

4 uždavinys. Raskite lygčių sistemos

$$\begin{cases} x(y+z+1) = y^2 + z^2 - 5, \\ y(z+x+1) = z^2 + x^2 - 5, \\ z(x+y+1) = x^2 + y^2 - 5 \end{cases}$$

visus sveikuosius sprendinius (x, y, z).

Sprendimas. Tarkime, kad (x, y, z) yra duotosios lygčių sistemos sveikasis sprendinys. Iš jos pirmosios lygties atimkime antrąją, o lygčių skirtumą suprastinkime:

$$
\begin{aligned}
(xy + xz + x) - (yz + yx + y) &= (y^2 + z^2 - 5) - (z^2 + x^2 - 5),\\
xz - yz + x - y &= y^2 - x^2,\\
(x - y)(z + 1) &= (y - x)(y + x),\\
(x - y)(x + y + z + 1) &= 0.
\end{aligned}
$$

Panašiai gauname, kad $(y - z)(x + y + z + 1) = 0$ ir $(z - x)(x + y + z + 1) = 0$. Jei $x + y + z + 1 \neq 0$, tai $x = y = z$. Į lygčių sistemos pirmąją lygtį įrašę $y = x$ ir $z = x$, gauname lygtį $x(2x + 1) = 2x^2 - 5$. Iš čia randame $x = -5$. Gavome sprendinį $(x, y, z) = (-5, -5, -5)$.

Tarkime, kad $x + y + z + 1 = 0$. Tada $y + z + 1 = -x$. Šią išraišką įrašę į lygčių sistemos pirmąją lygtį, gauname

$$
\begin{aligned}
x(-x) &= y^2 + z^2 - 5,\\
x^2 + y^2 + z^2 &= 5.
\end{aligned}
$$

Duotoji lygčių sistema yra simetriška nežinomųjų x, y, z atžvilgiu, t. y. jei kuriuos nors du iš jų sukeisime vietomis, sistema nepasikeis. Todėl užtenka rasti sprendinius, tenkinančius sąlygą $x^2 \geqslant y^2 \geqslant z^2$: likusius sprendinius rasime, visais įmanomais būdais sukeisdami gautas x, y, z reikšmes vietomis.

Taigi tarkime, kad $x^2 \geqslant y^2 \geqslant z^2$. Iš lygybės $x^2 + y^2 + z^2 = 5$ gauname $x^2 = 4$, $y^2 = 1$ ir $z^2 = 0$. Todėl $x = \pm 2$, $y = \pm 1$ ir $z = 0$. Kadangi $x + y + z + 1 = 0$, tai tinka tik sprendinys $(x, y, z) = (-2, 1, 0)$ ir dar penki sprendiniai, gaunami skaičius -2, 1, 0 surašius kita tvarka.

Visi 7 gauti sprendiniai tenkina duotąją lygčių sistemą.

Ats.: $(-5, -5, -5)$, $(-2, 1, 0)$, $(-2, 0, 1)$, $(1, -2, 0)$, $(0, -2, 1)$, $(1, 0, -2)$, $(0, 1, -2)$.

5 uždavinys. Duoti tokie natūralieji skaičiai a, b, x ir y, kad skaičius $ax + by$ dalijasi iš $a^2 + b^2$. Įrodykite, kad skaičiai $a^2 + b^2$ ir $x^2 + y^2$ turi bendrą daliklį, didesnį už 1.

Pirmas sprendimas. Kadangi $ax + by$ dalijasi iš $a^2 + b^2$, tai skaičius

$$(ax + by)(ay + bx) = a^2xy + abx^2 + bay^2 + b^2yx = xy(a^2 + b^2) + ab(x^2 + y^2)$$

dalijasi iš $a^2 + b^2$. Todėl ir skaičius $ab(x^2 + y^2)$ dalijasi iš $a^2 + b^2$. Jei skaičių $a^2 + b^2$ ir $x^2 + y^2$ didžiausias bendras daliklis lygus 1, tai skaičius ab dalijasi iš $a^2 + b^2$. Tačiau taip būti negali, nes $ab < 2ab = a^2 + b^2 - (a - b)^2 \leqslant a^2 + b^2$. Vadinasi, skaičiai $a^2 + b^2$ ir $x^2 + y^2$ turi bendrą daliklį, didesnį už 1.

Antras sprendimas. Kadangi $ax+by$ dalijasi iš $D=a^2+b^2$, tai

$$ax+by \equiv 0 \pmod{D}, \qquad a^2+b^2 \equiv 0 \pmod{D},$$

$$ax \equiv -by \pmod{D}, \qquad a^2 \equiv -b^2 \pmod{D},$$

$$a^2x^2 \equiv (ax)^2 \equiv (-by)^2 = b^2y^2 \equiv -a^2y^2 \pmod{D}, \qquad a^2(x^2+y^2) \equiv 0 \pmod{D}.$$

Jei skaičių a^2+b^2 ir x^2+y^2 didžiausias bendras daliklis lygus 1, tai skaičius a^2 dalijasi iš a^2+b^2. Tačiau taip būti negali, nes $a^2 < a^2+b^2$. Vadinasi, skaičiai a^2+b^2 ir x^2+y^2 turi bendrą daliklį, didesnį už 1.

Lietuvos mokinių matematikos olimpiada
Savivaldybių etapo užduotys 11 - 12 klasei
2023 m.

1 uždavinys. Natūralųjį skaičių n vadinsime *naujametiniu*, jei 20-ies mažiausių natūraliųjų skaičių, didesnių už n, suma dalijasi iš 23. Nustatykite 102-ąjį mažiausią naujametinį natūralųjį skaičių.

2 uždavinys. Skaičių n vadinsime *šauniu*, jei tai yra septynženklis skaičius $n = \overline{ABCDEFG}$, kurio kiekvienas skaitmuo lygus 1, 2, 3 arba 4 ir kuriam teisingos nelygybės

$$A \neq B \neq C \neq D \neq E \neq F \neq G, \qquad A \neq C \neq E \neq G, \qquad B \neq D \neq F.$$

a) Kiek yra šaunių skaičių?

b) Kiek yra šaunių skaičių, turinčių visus keturis skaitmenis 1, 2, 3, 4?

3 uždavinys. a) Nustatykite, ar šis teiginys teisingas: kiekvienas lygiagretainis $ABCD$, kurio įstrižainėje BD yra trikampio ABC įbrėžtinio apskritimo centras, yra rombas.

b) Nustatykite, ar šis teiginys teisingas: kiekvienas lygiagretainis $ABCD$, kurio įstrižainėje BD yra trikampio ABC apibrėžtinio apskritimo centras, yra rombas.

4 uždavinys. Urtė tam tikra tvarka surašė skaičius 1, 2, 3, ..., 30 ir taip gavo seką $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{30}$. Tada Ugnė išsprendė 15 kvadratinių lygčių $x^2 - a_{2i-1}x + a_{2i} = 0$, kur $i = 1, 2, 3, \ldots, 15$, ir atskirai kiekvienai lygčiai užrašė visus jos realiuosius sprendinius (du, vieną arba nė vieno). Urtė apibraukė tuos Ugnės užrašytus skaičius, kurie didesni už 20. Nustatykite, kiek daugiausiai Ugnės užrašytų skaičių galėjo būti apibraukta.

5 uždavinys. Skaičiai P ir Q vadinami *pirminiais dvyniais*, jei tai pirminiai skaičiai, kuriems $|P-Q| = 2$. Kiekvienam natūraliajam skaičiui $n > 1$ skaičių $1, 2, 3, \ldots, n$ mažiausią bendrą kartotinį pažymėkime $M(n)$. Nustatykite visas pirminių dvynių poras (p, q), kurioms $q > p$ ir $M(q) > qM(p)$.

Kiekvienas uždavinys vertinamas 5 taškais.

Lietuvos mokinių matematikos olimpiada
Savivaldybių etapo užduočių 11 - 12 klasei sprendimai
2023 m.

1 uždavinys. Natūralųjį skaičių n vadinsime *naujametiniu*, jei 20-ies mažiausių natūraliųjų skaičių, didesnių už n, suma dalijasi iš 23. Nustatykite 102-ąjį mažiausią naujametinį natūralųjį skaičių.

Sprendimas. Natūralusis skaičius n yra naujametinis tada ir tik tada, kai skaičius

$$(n+1)+(n+2)+\ldots+(n+20) = 20n+(1+20)+(2+19)+\ldots+(10+11) =$$
$$= 20n+21\cdot 10 = 20n+210 = 20n-20+230 = 20(n-1)+230$$

dalijasi iš 23, taigi kai $20(n-1)$ dalijasi iš 23. Remiantis lygybe $\mathrm{DBD}\,(20,23)=1$, skaičius $20(n-1)$ dalijasi iš 23 tada ir tik tada, kai iš 23 dalijasi skaičius $n-1$, taigi kai skaičius n dalijasi iš 23 su liekana 1. Vadinasi, naujametiniai skaičiai – tai visi natūralieji skaičiai, kurie dalijasi iš 23 su liekana 1.

Naujametiniai skaičiai sudaro seką (aritmetinę progresiją) 1, 24, 47, 70, ... Jos nariai lygūs $1+23k$, kur $k=0$, 1, 2, ... Sekos 102-asis narys lygus $1+23\cdot 101 = 1+2323 = 2324$. Tai ir yra ieškomas naujametinis skaičius.

Ats.: 2324.

2 uždavinys. Skaičių n vadinsime *šauniu*, jei tai yra septynženklis skaičius $n = \overline{ABCDEFG}$, kurio kiekvienas skaitmuo lygus 1, 2, 3 arba 4 ir kuriam teisingos nelygybės

$$A\neq B\neq C\neq D\neq E\neq F\neq G, \qquad A\neq C\neq E\neq G, \qquad B\neq D\neq F.$$

a) Kiek yra šaunių skaičių?

b) Kiek yra šaunių skaičių, turinčių visus keturis skaitmenis 1, 2, 3, 4?

Sprendimas. a) Visus šaunius skaičius $\overline{ABCDEFG}$ galima gauti taip: laisvai pasirenkame $A\in\{1,2,3,4\}$ (4 galimybės), tada pasirenkame $B\neq A$ (3 galimybės), o toliau iš eilės pasirenkame C, D, E, F, G. Kiekvienam iš šių 5 skaitmenų turime po dvi galimybes: rinkdamiesi C, turime atmesti skaitmenų A ir B reikšmes (čia $A\neq B$); rinkdamiesi D – skaitmenų B ir C reikšmes (čia $B\neq C$); ir t. t. Vadinasi, iš viso yra $4\cdot 3\cdot 2^5 = 12\cdot 32 = 384$ šaunūs skaičiai.

b) Jei skaičius $\overline{ABCDEFG}$ yra šaunus, tai skaitmenys A, B, C yra skirtingi. Visus šaunius skaičius $\overline{ABCDEFG}$, kurie turi tik tris skirtingus skaitmenis, galima gauti taip: laisvai pasirenkame $A\in\{1,2,3,4\}$ (4 galimybės), pasirenkame $B\neq A$ (3 galimybės), pasirenkame C, kuriam $C\neq A$, $C\neq B$ (2 galimybės), o toliau turime imti $D=A$

(nes $D \neq B$, $D \neq C$) ir analogiškai iš eilės $E = B$, $F = C$, $G = A$. Vadinasi, yra iš viso $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ šaunūs skaičiai, turintys tik tris skirtingus skaitmenis. Pasiremkime a) dalimi: šaunių skaičių, turinčių visus keturis skaitmenis 1, 2, 3, 4, yra $384 - 24 = 360$.

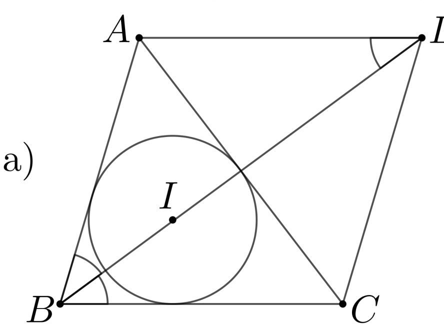
Ats.: a) 384; b) 360.

3 uždavinys. a) Nustatykite, ar šis teiginys teisingas: kiekvienas lygiagretainis $ABCD$, kurio įstrižainėje BD yra trikampio ABC įbrėžtinio apskritimo centras, yra rombas.

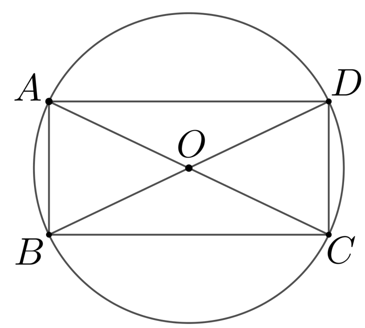
b) Nustatykite, ar šis teiginys teisingas: kiekvienas lygiagretainis $ABCD$, kurio įstrižainėje BD yra trikampio ABC apibrėžtinio apskritimo centras, yra rombas.

Sprendimas. a) Nagrinėkime bet kokį lygiagretainį $ABCD$, kurio įstrižainėje BD yra trikampio ABC įbrėžtinio apskritimo centras I (žr. pav.). Taške I kertasi trikampio ABC pusiaukampinės, todėl $\angle ABD = \angle CBD$. Kita vertus, iš lygiagretainio kraštinių AD ir BC lygiagretumo išplaukia, kad $\angle CBD = \angle ADB$. Todėl $\angle ABD = \angle ADB$, ir trikampis ABD yra lygiašonis. Lygiagretainio $ABCD$ visos kraštinės lygios: $CD = AB = AD = BC$. Vadinasi, šis lygiagretainis yra rombas. Tai įrodo, kad duotasis teiginys yra teisingas.

a)



b)



b) Nagrinėkime tokį lygiagretainį $ABCD$, kuris yra stačiakampis, bet nėra rombas ($AB \neq BC$). Trikampis ABC yra statusis, todėl jo apibrėžtinio apskritimo centras O yra įžambinės AC vidurio taškas. Lygiagretainio $ABCD$ įstrižainės dalija viena kitą pusiau, todėl O yra jų sankirtos taškas (žr. pav.). Vadinasi, trikampio ABC apibrėžtinio apskritimo centras yra įstrižainėje BD, bet lygiagretainis $ABCD$ nėra rombas. Tai įrodo, kad duotasis teiginys nėra teisingas.

Ats.: a) taip, teiginys teisingas; b) ne, teiginys nėra teisingas.

4 uždavinys. Urtė tam tikra tvarka surašė skaičius 1, 2, 3, …, 30 ir taip gavo seką $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{30}$. Tada Ugnė išsprendė 15 kvadratinių lygčių $x^2 - a_{2i-1}x + a_{2i} = 0$, kur $i = 1, 2, 3, \ldots, 15$, ir atskirai kiekvienai lygčiai užrašė visus jos realiuosius sprendinius (du, vieną arba nė vieno). Urtė apibraukė tuos Ugnės užrašytus skaičius, kurie didesni už 20. Nustatykite, kiek daugiausiai Ugnės užrašytų skaičių galėjo būti apibraukta.

Sprendimas. Nagrinėkime bet kurią iš 15 duotųjų lygčių ir tarkime, kad ji turi sprendinį $x = x_1 > 20$. Tada ji turi sprendinį $x = x_2$ (galbūt lygų x_1), kuriam, remiantis Vijeto teorema, teisingos lygybės $a_{2i-1} = x_1 + x_2$ ir $a_{2i} = x_1 x_2$. Kadangi a_{2i-1}, $a_{2i} \in [1; 30]$, tai:

1) $x_2 = a_{2i-1} - x_1 < 30 - 20 < 20$;
2) $x_2 = \frac{a_{2i}}{x_1} > 0$ ir $a_{2i-1} = x_1 + x_2 > x_1 > 20$.

Atitinkamai galima padaryti tokias dvi išvadas apie 15 lygčių ir jų sprendinius:

1) kiekviena lygtis $x^2 - a_{2i-1}x + a_{2i} = 0$ turi daugiausiai vieną sprendinį, didesnį už 20;
2) lygčių $x^2 - a_{2i-1}x + a_{2i} = 0$, turinčių sprendinį, didesnį už 20, gali būti daugiausiai 10: tik jei $a_{2i-1} = 21, 22, 23, \ldots, 30$.

Vadinasi, Urtė apibraukė ne daugiau nei 10 skaičių.

Kita vertus, Urtė galėjo apibraukti 10 skaičių. Tai pagrįsime pavyzdžiu. Jau žinome, kad būtinai turime imti 10 reikšmių $a_{2i-1} = 21, 22, 23, \ldots, 30$. Iš eilės imkime $a_1 = 21$, $a_3 = 22$, $a_5 = 23$, …, $a_{19} = 30$ ir parinkime a_2, a_4, a_6, …, a_{20}, kad atitinkamų 10 lygčių (didesniuosius) sprendinius $\frac{a_{2i-1}+\sqrt{a_{2i-1}^2-4a_{2i}}}{2}$ gautume kuo didesnius. Tam natūralu pasirinkti mažiausias galimas a_{2i} reikšmes: $a_2 = 1$, $a_4 = 2$, $a_6 = 3$, …, $a_{20} = 10$. Tada

$$\sqrt{a_{2i-1}^2 - 4a_{2i}} \geqslant \sqrt{21^2 - 4 \cdot 10} = \sqrt{401} > 20, \qquad \frac{a_{2i-1} + \sqrt{a_{2i-1}^2 - 4a_{2i}}}{2} > \frac{20+20}{2} = 20,$$

kai $(2i-1, 2i) = (1,2), (3,4), \ldots, (19,20)$. Nelygybės užtikrina, kad 10 iš 15 duotųjų lygčių turėtų po sprendinį, didesnį už 20.

Ats.: 10.

5 uždavinys. Skaičiai P ir Q vadinami *pirminiais dvyniais*, jei tai pirminiai skaičiai, kuriems $|P - Q| = 2$. Kiekvienam natūraliajam skaičiui $n > 1$ skaičių 1, 2, 3, …, n mažiausią bendrą kartotinį pažymėkime $M(n)$. Nustatykite visas pirminių dvynių poras (p, q), kurioms $q > p$ ir $M(q) > qM(p)$.

Sprendimas. Tarkime, kad p ir q yra pirminiai dvyniai, $q > p$, $M(q) > qM(p)$. Tada $q = p + 2$. Susiekime $M(q)$ su $M(q-1) = M(p+1)$. Skaičius $M(q-1)$ dalijasi iš skaičių 1, 2, …, $q-1$, todėl skaičius $qM(q-1)$ yra skaičių 1, 2, …, $q-1$, q bendras kartotinis ir negali būti mažesnis nei $M(q)$:

$$qM(p+1) = qM(q-1) \geqslant M(q) > qM(p), \qquad M(p+1) > M(p).$$

(Iš tiesų skaičius $qM(q-1)$ netgi turi sutapti su skaičių 1, 2, …, $q-1$, q mažiausiu bendru kartotiniu $M(q)$, bet čia to nebūtina pastebėti.)

Tarkime, kad skaičius $p+1$ turi bent du skirtingus pirminius daliklius. Tada $p+1 = m_1 m_2$, kur m_1 ir m_2 yra tarpusavyje pirminiai natūralieji skaičiai, mažesni nei $p+1$. (Pavyzdžiui, turint skaidinį pirminiais daugikliais $p+1 = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_k^{a_k}$ galima imti $m_1 = p_1^{a_1}$ ir $m_2 = p_2^{a_2} \ldots p_k^{a_k}$.) Tačiau $M(p)$ dalijasi iš kiekvieno natūraliojo skaičiaus, mažesnio nei $p+1$, todėl $M(p)$ dalijasi iš m_1 ir m_2, o kadangi šie du skaičiai tarpusavyje pirminiai, tai ir iš $m_1 m_2 = p+1$. Tad $M(p)$ yra skaičių 1, 2, …, p, $p+1$ bendras kartotinis, ir $M(p) \geqslant M(p+1) > M(p)$. Gavome prieštarą. Vadinasi, $p+1$ turi vienintelį pirminį daliklį ir yra to daliklio laipsnis (su natūrliuoju rodikliu).

Jei $p = 2$, tai skaičius $q = p+2 = 4$ nėra pirminis, todėl pirminis skaičius p yra nelyginis. Pirminio skaičiaus laipsnis $p+1$ dalijasi iš 2, todėl tai yra dvejeto laipsnis: $p+1 = 2^a$, kur skaičius a natūralusis. Tarp trijų iš eilės einančių natūraliųjų skaičių $p = 2^a - 1$, 2^a, $q = 2^a + 1$ turi būti vienas, kuris dalijasi iš 3. Tai ne 2^a, todėl vienas iš pirminių skaičių p ir q dalijasi iš 3 bei turi būti lygus 3. Jei $q = 3$, tai $p = q - 2 = 1$ – netinka. Vadinasi, $p = 3$, $q = 5$ yra vienintelės galimos reikšmės. Jos tenkina uždavinio sąlygą: $q > p$ ir $M(q) = 60 > 5 \cdot 6 = qM(p)$.

Ats.: $(3, 5)$.