Lietuvos mokinių matematikos olimpiada
Savivaldybių etapo užduočių sprendimai ir atsakymai 9 - 10 klasei
2024 m.

1 uždavinys. Stačiojo trikampio kraštinių ilgiai yra realieji skaičiai x, $2kx$ ir $3k^2x$. Raskite visas galimas skaičiaus k reikšmes.

2 uždavinys. Petriukas užsimanė tapti tarptautinės matematikos olimpiados IMO nugalėtoju, todėl besitreniruodamas net šimtą dienų iš eilės sprendė matematikos olimpiadinius uždavinius. Kiekvieną dieną, išskyrus pirmąją, Petriukas išspręsdavo vienu uždaviniu mažiau, nei vakarykštę dieną, jei diena būdavo saulėta. Tą dieną jis eidavo į lauką ir mažiau laiko likdavo uždaviniams. Jei diena pasitaikydavo apsiniaukusi, Petriukas išspręsdavo vienu uždaviniu daugiau, nei vakarykštę dieną. Pvz., jei šeštą dieną Petriukas išsprendė tris uždavinius, tai septintą dieną išsprendė tik du, jei septinta diena buvo saulėta, arba keturis uždavinius, jei apsiniaukusi. Visos dienos buvo arba tik saulėtos, arba tik apsiniaukusios, nebuvo tokių dienų, kai dalis dienos saulėta, kita dalis apsiniaukusi. Per pirmas devyniasdešimt devynias dienas Petriukas išsprendė 148 uždavinius. Kiekvieną dieną Petriukas išspręsdavo bent po vieną uždavinį.

a) Koks oras buvo šimtąją dieną?

b) Kiek daugiausiai galėjo būti apsiniaukusių dienų tarp šimto dienų?

3 uždavinys. a) Skaičių 2024 išreikškite tokia suma

$$2024 = a_1 \cdot 1! + a_2 \cdot 2! + \ldots + a_k \cdot k!,$$

čia k yra natūralusis skaičius, $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k$, a_l yra sveikieji skaičiai, tenkinantys nelygybes $0 \leq a_l \leq l$, $l = 1, 2, \ldots, k$.

b) Paaiškinkite, kodėl sumoje esantis skaičius a_1 nustatomas vienareikšmiškai. Kam yra lygus skaičius a_1?

c) Įrodykite, kad skaičių 2024 galima vieninteliu būdu išreikšti nurodyta suma, t.y. ne tik skaičius a_1 nustatomas vienareikšmiškai, bet ir visi kiti skaičiai a_l, $l = 2, 3, \ldots, k$ bei skaičius k nustatomi vienareikšmiškai.

4 uždavinys. AE yra trikampio ABC pusiaukampinė (taškas E yra kraštinėje BC). Raskite trikampio ABC kampus, jei $AE = EC$ ir $AC = 2AB$.

5 uždavinys. a) Į kiekvieną 10×10 lentelės langelį yra įrašyta po vieną sveikąjį skaičių. Gretimuose langeliuose, turinčiuose bendrą kraštinę, esantys skaičiai skiriasi ne daugiau kaip penkiais vienetais. Įrodykite, kad egzistuoja bent du langeliai, kuriuose įrašyti skaičiai sutampa.

b) Ar būtinai egzistuoja du langeliai, kuriuose įrašyti skaičiai sutampa, jei lentelėje surašyti skaičiai yra ne sveikieji, o racionalieji? Atsakymą pagrįskite.

Lietuvos mokinių matematikos olimpiada
Savivaldybių etapo užduočių sprendimai ir atsakymai 9 - 10 klasei
2024 m.

1 uždavinys.

Stačiojo trikampio kraštinių ilgiai yra realieji skaičiai x, $2kx$ ir $3k^2x$. Raskite visas galimas skaičiaus k reikšmes.

Atsakymas: $\sqrt{2+\sqrt{13}}/3$; $\sqrt{\sqrt{13}-2}/3$.

Sprendimas. Pirmiausia pastebėsime, kad skaičiai x ir $2kx$ yra teigiami, todėl skaičius k taip pat turi būti teigiamas. Neigiamas k reikšmes atmesime.

Galimi trys atvejai.

1) Įžambinė yra skaičius $3k^2x$. Pagal Pitagoro teoremą sudarome bikvadratinę lygtį

$$1 + 4k^2 = 9k^4.$$

Ją išsprendę gauname vieną atsakymą $k = \sqrt{2+\sqrt{13}}/3$.

2) Įžambinė yra skaičius x. Pagal Pitagoro teoremą sudarome bikvadratinę lygtį

$$1 = 4k^2 + 9k^4.$$

Ją išsprendę gauname antrą atsakymą $k = \sqrt{\sqrt{13}-2}/3$.

3) Įžambinė yra skaičius $2kx$. Pagal Pitagoro teoremą sudarome bikvadratinę lygtį

$$1 + 9k^4 = 4k^2.$$

Ši lygtis sprendinių neturi.

2 uždavinys. Petriukas užsimanė tapti tarptautinės matematikos olimpiados IMO nugalėtoju, todėl besitreniruodamas net šimtą dienų iš eilės sprendė matematikos olimpiadinius uždavinius. Kiekvieną dieną, išskyrus pirmąją, Petriukas išspręsdavo vienu uždaviniu mažiau, nei vakarykštę dieną, jei diena būdavo saulėta. Tą dieną jis eidavo į lauką ir mažiau laiko likdavo uždaviniams. Jei diena pasitaikydavo apsiniaukusi, Petriukas išspręsdavo vienu uždaviniu daugiau, nei vakarykštę dieną. Pvz., jei šeštą dieną Petriukas išsprendė tris uždavinius, tai septintą dieną išsprendė tik du, jei septinta diena buvo saulėta, arba keturis uždavinius, jei apsiniaukusi. Visos dienos buvo arba tik saulėtos, arba tik apsiniaukusios, nebuvo tokių dienų, kai dalis dienos saulėta, kita dalis apsiniaukusi. Per pirmas devyniasdešimt devynias dienas Petriukas išsprendė 148 uždavinius. Kiekvieną dieną Petriukas išspręsdavo bent po vieną uždavinį.

a) Koks oras buvo šimtąją dieną?

b) Kiek daugiausiai galėjo būti apsiniaukusių dienų tarp šimto dienų?

Atsakymas: apsiniaukę; 51.

Sprendimas. Pirmiausia pastebėsime, kad negali būti dviejų iš eilės einančių dienų, kuriomis Petriukas išsprendė tą patį uždavinių skaičių. Todėl per dvi iš eilės einančias dienas buvo išspręsta ne mažiau kaip trys uždaviniai. Į 99 dienas telpa 49 pilnos dienų poros. $49 \cdot 3 = 147$. Taigi, 99-tąją, o taip pat ir pirmąją, Petriukas išsprendė po 1 uždavinį. Todėl yra įmanomas vienintelis variantas, kai lyginėmis dienomis išsprendė po du uždavinius, o nelyginėmis – po vieną. Jei šimtoji diena būtų saulėta, tai jis būtų tą dieną išsprendęs nulį uždavinių, t.y. vienu mažiau, nei 99-tąją, o tai prieštarauja uždavinio sąlygai. Taigi atsakymas yra "apsiniaukę".

b) Lyginėmis dienomis buvo apsiniaukę. Saulėta buvo nelyginėmis dienomis, išskyrus pirmąją, kai galėjo būti tiek saulėta, tiek apsiniaukę. Todėl atsakymas yra 51.

3 uždavinys. a) Skaičių 2024 išreikškite tokia suma

$$2024 = a_1 \cdot 1! + a_2 \cdot 2! + \ldots + a_k \cdot k!,$$

čia k yra natūralusis skaičius, $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k$, a_l yra sveikieji skaičiai, tenkinantys nelygybes $0 \le a_l \le l$, $l = 1, 2, \ldots, k$.

b) Paaiškinkite, kodėl sumoje esantis skaičius a_1 nustatomas vienareikšmiškai. Kam yra lygus skaičius a_1?

c) Įrodykite, kad skaičių 2024 galima vienintelių būdu išreikšti nurodyta suma, t.y. ne tik skaičius a_1 nustatomas vienareikšmiškai, bet ir visi kiti skaičiai a_l, $l = 2, 3, \ldots, k$ bei skaičius k nustatomi vienareikšmiškai.

Atsakymas: $2024 = 0 \cdot 1! + 1 \cdot 2! + 1 \cdot 3! + 4 \cdot 4! + 4 \cdot 5! + 2 \cdot 6!$.

Sprendimas. b)

$$a_1 = a_1 \cdot 1! = 2024 - (a_2 \cdot 2! + \ldots + a_k \cdot k!).$$

Visi dešinėje pusėje esantys dėmenys yra lyginiai, todėl lyginis yra ir a_1. Taigi $a_1 = 0$.

c) Iš nelygybės

$$5040 = 7! > 2024 > 6! > 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + 5 \cdot 5! = 599,$$

išplaukia, kad skaičius $k = 6$ nustatomas vienareikšmiškai.

Iš nelygybės

$$2160 = 3 \cdot 6! > 2024 > 2 \cdot 6! > 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + 6 \cdot 6! = 1439,$$

išplaukia, kad skaičius $a_6 = 2$ nustatomas vienareikšmiškai. Analogiškus samprotavimus atlikę skirtumui $2024 - 2 \cdot 6! = 584$, gauname, kad skaičius $a_5 = 4$ nustatomas vienareikšmiškai. Likę skaičiai nustatomi taip pat.

4 uždavinys. AE yra trikampio ABC pusiaukampinė (taškas E yra kraštinėje BC). Raskite trikampio ABC kamus, jei $AE = EC$ ir $AC = 2AB$.

Atsakymas: $90°$, $60°$, $30°$.

Sprendimas. Iš taško E nubrėžiame statmenį ED į kraštinę AC. Trikampis AEC yra lygiašonis. Turime $AD = DC = AB$. Trikampiai AED ir AEB yra lygūs pagal dvi kraštines ir kampą tarp jų. Kadangi kampas ADE yra status, tai kampas ABC taip pat yra status. Kiti du kampai yra $60°$ ir $30°$, kadangi stačiajame trikampyje vienas statinis yra dvigubai trumpesnis už įžambinę.

5 uždavinys. a) Į kiekvieną 10×10 lentelės langelį yra įrašyta po vieną sveikąjį skaičių. Gretimuose langeliuose, turinčiuose bendrą kraštinę, esantys skaičiai skiriasi ne daugiau kaip penkiais vienetais. Įrodykite, kad egzistuoja bent du langeliai, kuriuose įrašyti skaičiai sutampa.

b) Ar būtinai egzistuoja du langeliai, kuriuose įrašyti skaičiai sutampa, jei lentelėje surašyti skaičiai yra ne sveikieji, o racionalieji? Atsakymą pagrįskite.

Sprendimas. a) Pažymėkime mažiausią lentelėje esantį skaičių raide a. Tada gretimas skaičius yra ne didesnis už $a+5$, pastarajam gretimas yra ne didesnis už $a+10$ ir t.t. Kadangi pereiti nuo vieno langelio iki bet kurio kito langelio reikia ne daugiau kaip devyniolikos žingsnių, vienu žingsniu pereinant į gretimą langelį (tolimiausi langeliai yra kampiniai, esantys vienoje įstrižainėje), tai didžiausias skaičius yra $a + 95$, t.y. daugiausiai gali būti 96 skirtingi skaičiai. Todėl šimto skaičių tarpe atsiras bent du vienodi skaičiai.

b) Nebūtinai. Skaičius $1; 1,01; 1,02; \ldots; 1,99$ bet kokia tvarka surašykime į lentelę. Visi skaičiai yra skirtingi, o skirtumas ne tik tarp gretimų skaičių yra mažesnis už 5.

Lietuvos mokinių matematikos olimpiada

Savivaldybių etapo užduotys 11 - 12 klasei

2024 m.

1 uždavinys. Išspręskite nelygybę

$$\sqrt{4+5\sin x} \geq 4-\sqrt{1-\cos^4 x}.$$

2 uždavinys. Dvi parabolės $y=x^2+x+a$ ir $y=x^2+ax+1$ turi vienintelį bendrą tašką C, čia a yra duotas tam tikras skaičius. Per taškus C ir $D(0;3)$ nubrėžta tiesė kerta pirmąją parabolę taškuose A ir C, o antrąją – B ir C.

a) Raskite taško C koordinates ir nubrėžtos tiesės lygtį. Koordinatės ir lygties koeficientai gali priklausyti nuo skaičiaus a.

b) raskite visas a reikšmes, jei $AC = BC$.

3 uždavinys. a) Įrodykite formulę

$$(k+1)!-1 = 1\cdot 1! + 2\cdot 2! + \ldots + k\cdot k!,$$

čia k yra natūralusis skaičius, $k! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot k$.

b) Įrodykite, kad kiekvieną natūralųjį skaičių n galima išreikšti vieninteliu būdu tokia suma

$$n = a_1\cdot 1! + a_2\cdot 2! + \ldots + a_k\cdot k!,$$

čia a_l yra sveikieji skaičiai, tenkinantys nelygybes $0 \leq a_l \leq l$, $l = 1, 2, \ldots, k$, (t.y. skaičiai a_l, $l = 1, 2, 3, \ldots, k$ bei skaičius k nustatomi vienareikšmiškai).

c) Skaičių 2024 išreikškite nurodyta b) dalyje suma.

4 uždavinys. Apskritimo stygoje AB yra pažymėtas taškas P toks, kad $AP = 2PB$. Styga DE yra statmena stygai AB. Stygos AB ir DE kertasi taške P. Įrodykite, kad atkarpos AP vidurio taškas yra trikampio AED aukštinių susikirtimo taškas.

5 uždavinys. a) Į kiekvieną 30×30 lentelės langelį yra įrašyta po vieną sveikąjį skaičių. Gretimuose langeliuose, turinčiuose bendrą kraštinę, esantys skaičiai skiriasi ne daugiau kaip penkiais vienetais. Įrodykite, kad egzistuoja bent keturi langeliai, kuriuose įrašyti skaičiai sutampa.

b) Ar būtinai egzistuoja keturi langeliai, kuriuose įrašyti skaičiai sutampa, jei lentelėje surašyti skaičiai yra ne sveikieji, o racionalieji? Atsakymą pagrįskite.

`Lietuvos mokinių matematikos olimpiada`

`Savivaldybių etapo užduotys ir sprendimai 11 - 12 klasei`

`2024 m.`

1 uždavinys. Išspręskite nelygybę

$$\sqrt{4+5\sin x} \geq 4-\sqrt{1-\cos^4 x}.$$

Atsakymas: $\pi/2+2\pi k$, $k \in Z$.

Sprendimas. Kairė nelygybės pusė yra nedidesnė už 3, o dešinė – nemažesnė už 3. Todėl sprendinių bus tik tada (jeigu bus, tuščios aibės atvejis yra neatmestinas), kai nelygybė virs lygtimi. Kairė pusė įgyja reikšmę 3 tik tada, kai $\sin x = 1$ arba $x = \pi/2+2\pi k$, $k \in Z$. Patikriname, kad šios x reikšmės tenkina nelygybę.

2 uždavinys. Dvi parabolės $y = x^2+x+a$ ir $y = x^2+ax+1$ turi vienintelį bendrą tašką C, čia a yra duotas tam tikras skaičius. Per taškus C ir $D(0; 3)$ nubrėžta tiesė kerta pirmąjq parabolę taškuose A ir C, o antrąją – B ir C.

a) Raskite taško C koordinates ir nubrėžtos tiesės lygtį. Koordinatės ir lygties koeficientai gali priklausyti nuo skaičiaus a.

b) raskite visas a reikšmes, jei $AC = BC$.

Atsakymas: a) $C(1;\, a+2)$, $y = (a-1)x+3$, b) 7.

Sprendimas. a) Iš lygties

$$x^2+x+a = x^2+ax+1$$

lengvai surandame taško C koordinates $x_C = 1$ ir $y_C = a+2$. Aišku, kad $a \neq 1$, nes tada parabolės sutampa, o pagal uždavinio sąlygą parabolės gali turėti tik vieną bendrą tašką. Po to sudarę lygčių sistemą randame reikiamą tiesę $y = (a-1)x+3$.

b) Sudarę lygtį

$$x^2+x+a = (a-1)x+3,$$

gauname kvadratinę lygtį

$$x^2+(2-a)x+a-3 = 0,$$

iš kurios randame taško A pirmąją koordinatę $x_A = a - 3$. Kita šaknis yra taško C koordinatė $x_C = 1$.

Sudarę lygtį
$$x^2 + ax + 1 = (a-1)x + 3,$$
analogiškai randame taško B pirmąją koordinatę $x_B = -2$.

Kadangi taškas C yra atkarpos AB vidurio taškas, tai taško C pirmoji koordinatė x_C yra lygi taškų A ir B pirmųjų koordinačių x_A ir x_B aritmetiniam vidurkiui
$$1 = x_C = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{a-3-2}{2}.$$
Taigi, $a = 7$.

3 uždavinys. a) Įrodykite formulę
$$(k+1)! - 1 = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + k \cdot k!,$$
čia k yra natūralusis skaičius, $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k$.

b) Įrodykite, kad kiekvieną naturalųjį skaičių n galima išreikšti vieninteliu būdu tokia suma
$$n = a_1 \cdot 1! + a_2 \cdot 2! + \ldots + a_k \cdot k!,$$
čia a_l yra sveikieji skaičiai, tenkinantys nelygybes $0 \le a_l \le l$, $l = 1, 2, \ldots, k$, (t.y. skaičiai a_l bei skaičius k yra nustatomi vienareikšmiškai).

c) Skaičių 2024 išreikškite nurodyta b) dalyje suma.

Atsakymas: c) $2024 = 0 \times 1! + 1 \times 2! + 1 \times 3! + 4 \times 4! + 4 \times 5! + 2 \times 6!$.

Sprendimas. Sprendimas. a)
$$1 + 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + k \cdot k! = 2! + 2 \cdot 2! + \ldots + k \cdot k! =$$
$$= (1+2) \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \ldots + k \cdot k! = 3 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \ldots + k \cdot k! =$$
$$= 3! + 3 \cdot 3! + \ldots + k \cdot k! = (1+3) \cdot 3! + \ldots + k \cdot k! =$$
$$= 4! + 4 \cdot 4! + \ldots + k \cdot k! = \ldots = (k+1)!.$$
Vienetą perkėlę į dešinę lygybės pusę gauname reikiamą formulę.

b) Pirmas būdas.

Kiekvienam natūraliajam skaičiui n egzistuoja vienintelis natūralusis skaičius k toks, kad $k! \leq n < (k+1)!$, kadangi intervalai $[k!; (k+1)!)$ dengia visą natūraliųjų skaičių aibę ir tarpusavyje nesikerta. Intervalą $[k!; (k+1)!)$ padaliję į k vienodo ilgio intervalus $[l \cdot k!; (l+1) \cdot k!)$, $l = 1, 2, \ldots, k$ egzistuos vienintelis intervalas, kuriam priklausys skaičius n, $l \cdot k! \leq n < (l+1) \cdot k!$. Imkime $a_k = l$. Iš a) dalies išplaukia, kad a_k yra nustatomas vienareikšmiškai. Analogiškus samprotavimus pritaikę skaičiui $n - a_k k!$, vienareikšmiškai rasime skaičių a_{k-1}. Tokiu būdu surandami vienareikšmiškai visi skaičiai a_l, $l = 1, 2, \ldots, k$.

Antras būdas.

Pasinaudosime matematine indukcija. Kai $n = 1$, $1 = 1 \cdot 1!$ lygybė teisinga ir visi koeficientai $a_1 = 1$, $a_l = 0$, kai $l > 1$, yra vienareikšmiškai nustatyti. Teiginys yra teisingas.

Tariame, kad teiginys yra teisingas visiems natūraliesiems skaičiams $1, 2, \ldots n$. Tada

$$n + 1 = 1 + a_1 \cdot 1! + a_2 \cdot 2! + \ldots + a_k \cdot k!.$$

Jei $a_1 = 0$, tai $1 + a_1 \cdot 1! = 1 \cdot 1$, pirmasis koeficientas virsta vienetu vienareikšmiškai, o likusieji lieka nepakitę.

Jei $a_1 = 1$, $a_2 < 2$, tai $1 + a_1 \cdot 1! + a_2 \cdot 2! = (a_2 + 1) \cdot 2!$, pirmasis koeficientas virsta nuliu vienareikšmiškai, o antrasis padidėja vienetu taip pat vienareikšmiškai, kiti lieka nepakitę.

Pagaliau bendru atveju, jei $a_i = i$, $i = 1, 2, \ldots, l$, $a_{l+1} < l + 1$, tai pasinaudoję a) dalies formule gauname lygybę su vienareikšmiškai nustatytais koeficientais

$$n + 1 = 1 + 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + l \cdot l! + a_{l+1} \cdot (l+1)! + \ldots + a_k \cdot k! =$$

$$= 0 \cdot 1! + 0 \cdot 2! + \ldots + 0 \cdot l! + (a_{l+1} + 1) \cdot (l+1)! + \ldots + a_k \cdot k!$$

Teiginys yra įrodytas.

4 uždavinys. Apskritimo stygoje AB yra pažymėtas taškas P toks, kad $AP = 2PB$. Styga DE yra statmena stygai AB. Stygos AB ir DE kertasi taške P. Įrodykite, kad atkarpos AP vidurio taškas yra trikampio AED aukštinių susikirtimo taškas.

Sprendimas. Pažymėkime atkarpos AP vidurio tašką raide M. Pažymėkime raide Q atkarpos AD ir tiesės, einančios per taškus E ir M, susikirtimo tašką. Trikampiai MPE ir BPE yra lygūs pagal dvi kraštines ir kampą tarp jų ($MP = BP$, kraštinė EP yra bendra, kampas tarp jų yra status). $\angle DAB = \angle DEB$, kadangi šie lankai remiasi į tą patį lanką. Taigi

$$\angle QAM = \angle DAB = \angle DEB = \angle PEM,$$

be to $\angle AMQ = \angle PME$ (kryžminiai kampai). Vadinasi, trikampiai QAM ir PME yra panašūs pagal du kampus (tretieji kampai bus lygūs). Iš trikampių panašumo turime $\angle AQE = \angle MPE = 90°$, todėl EQ yra trikampio AED aukštinė, AP taip pat yra trikampio AED aukštinė pagal uždavinio sąlygą. Šios aukštinės kertasi taške M, tai ir reikėjo įrodyti.

5 uždavinys. a) Į kiekvieną 30×30 lentelės langelį yra įrašyta po vieną sveikąjį skaičių. Gretimuose langeliuose, turinčiuose bendrą kraštinę, esantys skaičiai skiriasi ne daugiau kaip penkiais vienetais. Įrodykite, kad egzistuoja bent keturi langeliai, kuriuose įrašyti skaičiai sutampa.

b) Ar būtinai egzistuoja keturi langeliai, kuriuose įrašyti skaičiai sutampa, jei lentelėje surašyti skaičiai yra ne sveikieji, o racionalieji? Atsakymą pagrįskite.

Sprendimas. a) Pažymėkime mažiausią lentelėje esantį skaičių raide a. Tada gretimas skaičius yra ne didesnis už $a + 5$, pastarajam gretimas ne didesnis už $a + 10$ ir t.t. Kadangi pereiti nuo vieno langelio iki bet kurio kito langelio reikia ne daugiau kaip penkiasdešimt devynių žingsnių, vienu žingsniu pereinant į gretimą langelį (tolimiausi langeliai yra kampiniai, esantys vienoje įstrižainėje), todėl didžiausias skaičius yra ne didesnis už $a + 59 \cdot 5 = a + 295$. Lentelėje yra 900 skaičių, o skirtingų skaičių gali būti tik nuo a iki $a + 295$, t.y. viso 296 skirtingi skaičiai. Skaičių 900 dalijant iš 296 gauname tris sveikus ir dar liekaną. Todėl atsiras bent keturi vienodi skaičiai.

b) Egzistuoja be galo daug skirtingų racionaliųjų skaičių intervale $[0; 5)$, todėl į lentelę galima surašyti skirtingus skaičius, o jų skirtumas bus ne didesnis už 5.