Lietuvos mokinių matematikos olimpiada
Savivaldybių etapo užduotys 9 - 10 klasei
2021 m.

1 uždavinys. Kiekvienas Teisybės kaimo gyventojas yra arba teisuolis (visada sako tiesą), arba melagis (visada meluoja). Jokie du kaimo gyventojai nėra to paties ūgio. Kiekvienas Teisybės gyventojas pasakė du teiginius:

„Joks Teisybės gyventojas nėra žemesnis už mane."

„Teisybėje yra daugiau nei 100 gyventojų, aukštesnių už mane."

Kiek iš viso gyventojų yra Teisybėje? Keli iš jų yra melagiai?

2 uždavinys. Raskite lygčių sistemos

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = x + 3y, \\ x^4 + y^4 = \dfrac{(x+3y)^2}{2} \end{cases}$$

visus realiuosius sprendinius (x, y).

3 uždavinys. Ratu surašyti skaičiai. Šiame skaičių rate yra m skaičių, lygių 2, o likę rato skaičiai lygūs 1. Rate kiekvienas skaičius a yra tarp dviejų jam gretimų skaičių, iš kurių bent vienas nelygus a. Kiekvienas užrašytas skaičius a sudaugintas su abiem jam gretimais skaičiais b ir c. Visų tokių sandaugų abc suma lygi 2021202. Nustatykite visas galimas skaičiaus m reikšmes.

4 uždavinys. Du gretimi keturkampio kampai lygūs $90°$ ir $150°$. Šiuos du kampus sudarančios trys keturkampio kraštinės yra lygios. Raskite kitus du keturkampio kampus.

5 uždavinys. Kelių pirminių (nebūtinai skirtingų) skaičių sandauga yra 10 kartų didesnė už jų sumą S. Raskite visas galimas skaičiaus S reikšmes.

Kiekvienas uždavinys vertinamas 5 taškais.

Lietuvos mokinių matematikos olimpiada
Savivaldybių etapo užduočių 9 - 10 klasei sprendimai
2021 m.

1 uždavinys. Kiekvienas Teisybės kaimo gyventojas yra arba teisuolis (visada sako tiesą), arba melagis (visada meluoja). Jokie du kaimo gyventojai nėra to paties ūgio. Kiekvienas Teisybės gyventojas pasakė du teiginius:

„Joks Teisybės gyventojas nėra žemesnis už mane.“

„Teisybėje yra daugiau nei 100 gyventojų, aukštesnių už mane.“

Kiek iš viso gyventojų yra Teisybėje? Keli iš jų yra melagiai?

Sprendimas. Mažiausio ūgio gyventojas pirmuoju teiginiu sako tiesą, todėl yra teisuolis. Vadinasi, ir antrasis jo teiginys yra teisingas: kaime yra mažiausiai 102 gyventojai. Antrojo žemiausio pagal ūgį gyventojo pirmasis teiginys klaidingas, todėl šis gyventojas yra melagis. Vadinasi, klaidingas ir antrasis jo teiginys: kaime yra ne daugiau nei 100 gyventojų, aukštesnių už antrąjį žemiausią kaimo gyventoją. Taigi kaime yra ne daugiau negu $100 + 2 = 102$ gyventojai. Vadinasi, kaime yra lygiai 102 gyventojai. Kadangi visų gyventojų, kurių ūgis nėra mažiausias, pirmasis teiginys yra klaidingas, tai jie visi yra melagiai: kaime yra vienas teisuolis ir 101 melagis.

Ats.: 102 gyventojai, 101 melagis.

2 uždavinys. Raskite lygčių sistemos

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = x + 3y, \\ x^4 + y^4 = \dfrac{(x+3y)^2}{2} \end{cases}$$

visus realiuosius sprendinius (x, y).

Sprendimas. Į antrąją sistemos lygtį, padaugintą iš 2, įrašykime $x + 3y = x^2 + y^2$:

$$2x^4 + 2y^4 = (x^2 + y^2)^2 = x^4 + 2x^2y^2 + y^4.$$

Sukėlus narius į vieną pusę, galima pastebėti pilnąjį kvadratą:

$$0 = x^4 - 2x^2y^2 + y^4 = (x^2 - y^2)^2, \qquad x^2 = y^2.$$

Todėl $x = y$ arba $x = -y$. Jei $x = -y$, tai $2y^2 = x^2 + y^2 = x + 3y = 2y$, $2y(y - 1) = 0$. Tada $y = 0$ arba 1, ir atitinkamai $x = 0$ arba -1. Jei $x = y$, tai $2y^2 = x^2 + y^2 = x + 3y = 4y$, $2y(y - 2) = 0$. Tada $y = x = 0$ arba $y = x = 2$.

Nesunku įsitikinti, kad gautosios poros $(0, 0)$, $(-1, 1)$, $(2, 2)$ yra sistemos sprendiniai.

Ats.: $(0, 0)$, $(-1, 1)$, $(2, 2)$.

3 uždavinys. Ratu surašyti skaičiai. Šiame skaičių rate yra m skaičių, lygių 2, o likę rato skaičiai lygūs 1. Rate kiekvienas skaičius a yra tarp dviejų jam gretimų skaičių, iš kurių bent vienas nelygus a. Kiekvienas užrašytas skaičius a sudaugintas su abiem jam gretimais skaičiais b ir c. Visų tokių sandaugų abc suma lygi 2021202. Nustatykite visas galimas skaičiaus m reikšmes.

Sprendimas. Kiekviena sandauga abc lygi $1 \cdot 1 \cdot 2 = 2$ arba $1 \cdot 2 \cdot 2 = 4$. Tarkime, kad iš viso turime x sandaugų $abc = 2$ ir y sandaugų $abc = 4$. Tada

$$2x + 4y = 2021202, \qquad x + 2y = 2021202 : 2 = 1010601.$$

Kita vertus, sandaugoje $abc = 2$ turime vieną dauginamąjį, lygų 2, o sandaugoje $abc = 4$ – du tokius dauginamuosius. Taip iš viso gauname $x + 2y$ dauginamųjų, lygių 2. Skaičiuojant sandaugas abc, kiekvienas užrašytas skaičius 2 yra tris kartus panaudojamas kaip dauginamasis. Vadinasi,

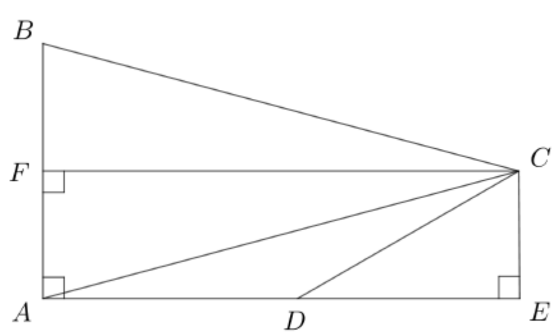
$$x + 2y = 3m, \qquad m = (x + 2y) : 3 = 1010601 : 3 = 336867.$$

Uždavinį galima spręsti iš esmės analogiškai, bet apsieinant be žymėjimų. Kadangi $1 \cdot 1 \cdot 2 = 2$ ir $1 \cdot 2 \cdot 2 = 2 + 2$, tai sandaugų suma 2021202 yra visų atitinkamų dauginamųjų, lygių 2, suma, o skaičius $2021202 : 2$ yra tokių dauginamųjų skaičius. Kiekvienas dvejetas skaičių rate yra tris kartus panaudojamas kaip dauginamasis, todėl rate yra $(2021202 : 2) : 3 = 336867$ dvejetai.

Ats.: 336867.

4 uždavinys. Du gretimi keturkampio kampai lygūs 90° ir 150°. Šiuos du kampus sudarančios trys keturkampio kraštinės yra lygios. Raskite kitus du keturkampio kampus.

Pirmas sprendimas. Keturkampio viršūnes pažymėkime A, B, C ir D, kad gautume $\angle BAD = 90°$, $\angle ADC = 150°$, $BA = AD = DC$. Iš viršūnės C į kraštinės AD tęsinį nuleiskime statmenį CE, o į kraštinę AB – statmenį CF (žr. pav.).



Kadangi $\angle ADC = 150°$, tai $\angle CDE = 180° - \angle ADC = 30°$. Stačiojo trikampio statinis, esantis prieš 30° kampą, lygus pusei įžambinės. Todėl $CE = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}AB$. Keturkampis $AFCE$ yra stačiakampis, todėl $AF = CE = \frac{1}{2}AB = BF$. Kadangi stačiųjų trikampių AFC ir BFC atitinkami statiniai yra lygūs, tai $AC = BC$, o trikampis ABC yra lygiašonis. Todėl

$$\angle ABC = \angle BAC = \angle BAD - \angle CAD = 90° - \angle CAD.$$

Trikampis ADC taip pat yra lygiašonis ($AD = DC$), taigi

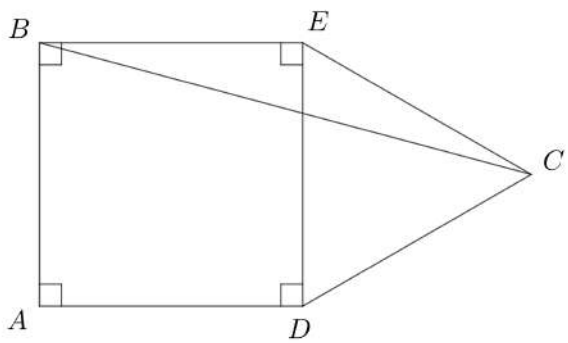
$$\angle CAD = \frac{180° - \angle ADC}{2} = \frac{180° - 150°}{2} = 15°.$$

Dabar galime rasti kampus ABC ir BCD:

$$\angle ABC = 90° - \angle CAD = 90° - 15° = 75°,$$

$$\angle BCD = 360° - \angle ABC - \angle BAD - \angle ADC = 360° - 75° - 90° - 150° = 45°.$$

Antras sprendimas. Keturkampio viršūnes pažymėkime A, B, C ir D, kad gautume $\angle BAD = 90°$, $\angle ADC = 150°$, $BA = AD = DC$. Pažymėkime tokį tašką E, kad keturkampis $ABED$ būtų kvadratas (žr. pav.). Toks taškas egzistuoja, nes $AB = AD$, $\angle BAD = 90°$.



Trikampis CDE yra lygiašonis, nes $CD = AB = DE$. Be to, $\angle CDE = \angle ADC - \angle ADE = 150° - 90° = 60°$. Vadinasi, likę du trikampio CDE kampai yra lygūs $(180° - 60°)/2 = 60°$. Tad šis trikampis lygiakraštis, ir $CE = ED = BE$. Iš čia gauname, kad trikampis BEC yra lygiašonis ir

$$\angle EBC = \frac{180° - \angle BEC}{2} = \frac{180° - (\angle BED + \angle DEC)}{2} = \frac{180° - (90° + 60°)}{2} = 15°.$$

Taigi

$$\angle ABC = \angle ABE - \angle EBC = 90° - 15° = 75°,$$

$$\angle BCD = 360° - \angle ABC - \angle BAD - \angle ADC = 360° - 75° - 90° - 150° = 45°.$$

Ats.: 45° ir 75°.

5 uždavinys. Kelių pirminių (nebūtinai skirtingų) skaičių sandauga yra 10 kartų didesnė už jų sumą S. Raskite visas galimas skaičiaus S reikšmes.

Pirmas sprendimas. Nagrinėkime kokį nors pirminių skaičių rinkinį, tenkinantį uždavinio sąlygą. Kadangi $10 = 2 \cdot 5$, tai šiam rinkiniui priklauso pirminiai skaičiai 2 ir 5. Be to, šiam rinkiniui turi priklausyti dar bent vienas pirminis skaičius. Tegu

$$p_1 \leqslant p_2 \leqslant \cdots \leqslant p_n$$

yra likę šio rinkinio pirminiai skaičiai (tada visas rinkinys yra 2, 5, p_1, p_2, …, p_n, čia $n \geqslant 1$). Pagal uždavinio sąlygą, $10 \cdot (2+5+p_1+\cdots+p_n) = 2 \cdot 5 \cdot p_1 \cdot \ldots \cdot p_n$. Šią lygybę galime perrašyti:

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_n + 7 = p_1 p_2 \cdots p_n.$$

Kadangi $p_1 + 7 > p_1$, tai $n \geqslant 2$.

Visiems realiesiems skaičiams $x \geqslant 2$, $y \geqslant 2$ teisinga nelygybė $xy \geqslant x + y$, nes $\frac{x+y}{xy} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$. Taikydami šią nelygybę sandaugai $p_1 p_2 \cdots p_{n-1}$, gauname

$$p_1p_2\cdots p_{n-1} \geqslant p_1p_2\cdots p_{n-2}+p_{n-1} \geqslant p_1p_2\cdots p_{n-3}+p_{n-2}+p_{n-1} \geqslant \cdots \geqslant p_1+p_2+\cdots+p_{n-1}.$$

Taigi,

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_n + 7 = p_1p_2\cdots p_n \geqslant (p_1 + p_2 + \cdots + p_{n-1})p_n.$$

Pažymėję $s = p_1+\cdots+p_{n-1}$, paskutinę nelygybę galime perrašyti taip: $s+p_n+7 \geqslant sp_n$. Iš čia gauname

$$(s-1)(p_n-1) \leqslant 8.$$

Gautoji nelygybė parodo, kad skaičiai p_n, s, o tuo pačiu ir n, yra gana maži. Todėl toliau galima pamėginti atlikti vienokią ar kitokią visų likusių atvejų perranką.

Perranka sutrumpėja, atmetus $p_n = 2$: jei $p_n = 2$, tai $p_1 = \cdots = p_{n-1} = 2$, vienas iš skaičių $p_1 + p_2 + \cdots + p_n + 7$ ir $p_1p_2\cdots p_n$ nelyginis, o kitas lyginis.

Kadangi $s \geqslant p_1 \geqslant 2$, o skaičius $p_n \geqslant 3$ pirminis, tai lieka tik šios poros (p_n, s), tenkinančios nelygybę $(s-1)(p_n-1) \leqslant 8$:

$$(3,2), \qquad (3,3), \qquad (3,4), \qquad (3,5), \qquad (5,2), \qquad (5,3), \qquad (7,2).$$

Kiekvienu iš 7 atvejų pagal s galime nustatyti p_1, …, p_{n-1} rinkinį. Atitinkamai gauname tokius p_1, …, p_{n-1}, p_n rinkinius:

$$2,3, \qquad 3,3, \qquad 2,2,3, \qquad 2,3,3 \qquad 2,5, \qquad 3,5, \qquad 2,7.$$

(Atveju $(p_n, s) = (3,5)$ atmetėme $p_1 = 5$, nes $p_1 \leqslant p_n$.) Atitinkamai gauname tokias $S = p_1 + \cdots + p_n + 7$ reikšmes:

$$12, \qquad 13, \qquad 14, \qquad 15, \qquad 14 \qquad 15, \qquad 16,$$

bei tokias $p_1 \cdots p_n$ reikšmes:

$$6, \qquad 9, \qquad 12, \qquad 18, \qquad 10, \qquad 15, \qquad 14.$$

Lygybę $S = p_1 \cdots p_n$ gauname tik šeštuoju atveju, kai $n = 2$, $p_1 = 3$, $p_2 = 5$. Pirminių skaičių rinkinys 2, 5, 3, 5 iš tiesų tenkina uždavinio sąlygą.

Taigi tinka vienintelė reikšmė $S = 2 + 5 + 3 + 5 = 15$.

Antras sprendimas. Lygybę

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_n + 7 = p_1 p_2 \cdots p_n, \qquad n \geqslant 2,$$

gavus kaip ir pirmame sprendime, toliau galima mąstyti ir kitaip:

$$2^{n-1} \cdot p_n \leqslant p_1 p_2 \cdots p_n = p_1 + p_2 + \cdots + p_n + 7 \leqslant n p_n + 7,$$

$$7 \geqslant p_n \cdot (2^{n-1} - n).$$

Nagrinėkime seką

$$2^0 - 1 = 0, \qquad 2^1 - 2 = 0, \qquad 2^2 - 3 = 1, \qquad 2^3 - 4 = 4, \quad \ldots, \quad 2^{k-1} - k, \quad \ldots$$

Jos dviejų gretimų narių skirtumas $(2^k - (k+1)) - (2^{k-1} - k) = 2^{k-1} - 1$ yra teigiamas, kai $k \geqslant 2$. Todėl ši seka be pirmojo nario yra didėjanti. Jei $n \geqslant 4$, tai

$$7 \geqslant p_n \cdot (2^{n-1} - n) \geqslant p_n \cdot (2^3 - 4) = 4p_n.$$

Tada $p_n < 2$ – prieštara. Taigi $n = 2$ arba 3.

Jei $n = 2$, tai $p_1 + p_2 + 7 = p_1 p_2$,

$$(p_1 - 1)(p_2 - 1) = 8, \text{ kur } 0 < p_1 - 1 \leqslant p_2 - 1,$$

$$p_1 - 1 = 1, \quad p_2 - 1 = 8 \quad \text{arba} \quad p_1 - 1 = 2, \quad p_2 - 1 = 4.$$

Pirmuoju atveju skaičius $p_2 = 9$ nėra pirminis. Antruoju atveju gauname $p_1 = 3$, $p_2 = 5$ ir atitinkamą pirminių skaičių rinkinį 2, 5, 3, 5, kuris tenkina uždavinio sąlygą.

Jei $n = 3$, tai $p_1 + p_2 + p_3 + 7 = p_1 p_2 p_3$ ir $7 \geqslant p_3 \cdot (2^2 - 3) = p_3$. Tada $p_3 = 2, 3, 5$ arba 7. Be to, $p_1 p_2 p_3 = p_1 + p_2 + p_3 + 7 \leqslant 7 + 7 + 7 + 7 \leqslant 28$. Tarp 1 ir 28 yra tokios šešios trijų pirminių skaičių sandaugos:

$$8 = 2{\cdot}2{\cdot}2, \qquad 12 = 2{\cdot}2{\cdot}3, \qquad 18 = 2{\cdot}3{\cdot}3, \qquad 20 = 2{\cdot}2{\cdot}5, \qquad 27 = 3{\cdot}3{\cdot}3, \qquad 28 = 2{\cdot}2{\cdot}7.$$

Tačiau atitinkamai

$$8 \neq 2 + 2 + 2 + 7, \qquad 12 \neq 2 + 2 + 3 + 7, \qquad 18 \neq 2 + 3 + 3 + 7,$$

$$20 \neq 2 + 2 + 5 + 7, \qquad 27 \neq 3 + 3 + 3 + 7, \qquad 28 \neq 2 + 2 + 7 + 7.$$

Taigi tinka vienintelė reikšmė $S = 2 + 5 + 3 + 5 = 15$.

Ats.: $S = 15$.

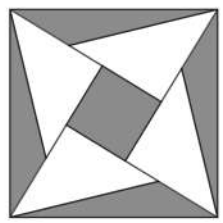
Lietuvos mokinių matematikos olimpiada
Savivaldybių etapo užduotys 11 - 12 klasei
2021 m.

1 uždavinys. Raskite lygčių sistemos

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = x + 3y, \\ x^4 + y^4 = \dfrac{(x+3y)^2}{2} \end{cases}$$

visus realiuosius sprendinius (x, y).

2 uždavinys. Paveikslėlyje pavaizduoti keturi balti trikampiai yra lygūs, statieji ir lygiašoniai. Šie balti trikampiai, keturi lygūs pilki trikampiai ir pilkas kvadratas sudaro didįjį kvadratą. Penkių pilkųjų figūrų plotų suma lygi keturių baltųjų trikampių plotų sumai. Raskite pilko trikampio mažiausio kampo didumą.



3 uždavinys. Ratu surašyti skaičiai. Šiame skaičių rate yra m skaičių, lygių 2, o likę rato skaičiai lygūs 1. Rate kiekvienas skaičius a yra tarp dviejų jam gretimų skaičių, iš kurių bent vienas nelygus a. Kiekvienas užrašytas skaičius a sudaugintas su abiem jam gretimais skaičiais b ir c. Visų tokių sandaugų abc suma lygi 2021202. Nustatykite visas galimas skaičiaus m reikšmes.

4 uždavinys. Natūralųjį skaičių N vadinsime *įnulintu*, jei jis tenkina tokias dvi sąlygas:

1) visi skaičiaus N skaitmenys skirtingi, ir jei jie būtų išrikiuoti didėjimo tvarka, tai pirmasis iš jų būtų nulis, o bet kurių dviejų gretimų skaitmenų skirtumas būtų lygus 1;

2) skaičiuje N kiekvienas nenulinis skaitmuo a yra gretimas bent vienam tokiam skaitmeniui b, kad $b < a$.

Kiek yra įnulintų natūraliųjų skaičių, didesnių už 1000?

5 uždavinys. Nustatykite, kiek yra natūraliųjų skaičių $n \in (0; 250\,000)$, kuriems skaičius

$$R_n = \sqrt{\left[\sqrt{n}\right] + 2\left[\sqrt{n+1}\right] + 3\left[\sqrt{n+2}\right]}$$

yra dviejų skirtingų pirminių skaičių sandauga.

Pastaba. Čia $[x]$ žymi skaičiaus x sveikąją dalį, t. y. didžiausią sveikąjį skaičių, ne didesnį už x.

Kiekvienas uždavinys vertinamas 5 taškais.

Lietuvos mokinių matematikos olimpiada
Savivaldybių etapo užduočių 11 - 12 klasei sprendimai
2021 m.

1 uždavinys. Raskite lygčių sistemos

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = x + 3y, \\ x^4 + y^4 = \dfrac{(x+3y)^2}{2} \end{cases}$$

visus realiuosius sprendinius (x, y).

Sprendimas. Į antrąją sistemos lygtį, padaugintą iš 2, įrašykime $x + 3y = x^2 + y^2$:

$$2x^4 + 2y^4 = (x^2 + y^2)^2 = x^4 + 2x^2y^2 + y^4.$$

Sukėlus narius į vieną pusę, galima pastebėti pilnąjį kvadratą:

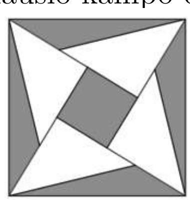
$$0 = x^4 - 2x^2y^2 + y^4 = (x^2 - y^2)^2, \qquad x^2 = y^2.$$

Todėl $x = y$ arba $x = -y$. Jei $x = -y$, tai $2y^2 = x^2 + y^2 = x + 3y = 2y$, $2y(y-1) = 0$. Tada $y = 0$ arba 1, ir atitinkamai $x = 0$ arba -1. Jei $x = y$, tai $2y^2 = x^2 + y^2 = x + 3y = 4y$, $2y(y-2) = 0$. Tada $y = x = 0$ arba $y = x = 2$.

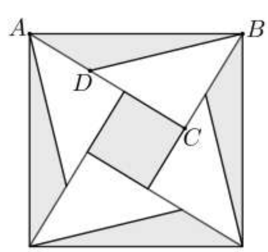
Nesunku įsitikinti, kad gautosios poros $(0, 0)$, $(-1, 1)$, $(2, 2)$ yra sistemos sprendiniai.

Ats.: $(0, 0)$, $(-1, 1)$, $(2, 2)$.

2 uždavinys. Paveikslėlyje pavaizduoti keturi balti trikampiai yra lygūs, statieji ir lygiašoniai. Šie balti trikampiai, keturi lygūs pilki trikampiai ir pilkas kvadratas sudaro didįjį kvadratą. Penkių pilkųjų figūrų plotų suma lygi keturių baltųjų trikampių plotų sumai. Raskite pilko trikampio mažiausio kampo didumą.



Sprendimas. Nagrinėkime stačiuosius trikampius ABC ir BCD (žr. pav.). Trikampio ABC kraštines pažymėkime $BC = a$, $AB = c$.



Stačiojo lygiašonio trikampio BCD plotas $\frac{a^2}{2}$ ir dar trijų tokių pačių baltų trikampių plotai sudaro pusę didžiojo kvadrato ploto c^2:

$$4 \cdot \frac{a^2}{2} = \frac{c^2}{2}, \qquad c = 2a.$$

Kadangi stačiojo trikampio ABC statinis $BC = a$ lygus pusei įžambinės $AB = c$, tai statinis yra prieš $\angle BAC = 30°$ kampą. Stačiojo lygiašonio trikampio BCD kampai lygūs $\angle CBD = \angle BDC = 45°$. Vadinasi,

$$\angle ABD = \angle ABC - \angle CBD = (90° - \angle BAC) - 45° = 60° - 45° = 15°.$$

Kiti du trikampio ABD kampai didesni nei $15°$:

$$\angle ADB = 180° - \angle BDC > 90°, \qquad \angle BAD = \angle BAC = 30°.$$

Ats.: $15°$.

3 uždavinys. Ratu surašyti skaičiai. Šiame skaičių rate yra m skaičių, lygių 2, o likę rato skaičiai lygūs 1. Rate kiekvienas skaičius a yra tarp dviejų jam gretimų skaičių, iš kurių bent vienas nelygus a. Kiekvienas užrašytas skaičius a sudaugintas su abiem jam gretimais skaičiais b ir c. Visų tokių sandaugų abc suma lygi 2021202. Nustatykite visas galimas skaičiaus m reikšmes.

Sprendimas. Kiekviena sandauga abc lygi $1 \cdot 1 \cdot 2 = 2$ arba $1 \cdot 2 \cdot 2 = 4$. Tarkime, kad iš viso turime x sandaugų $abc = 2$ ir y sandaugų $abc = 4$. Tada

$$2x + 4y = 2021202, \qquad x + 2y = 2021202 : 2 = 1010601.$$

Kita vertus, sandaugoje $abc = 2$ turime vieną dauginamąjį, lygų 2, o sandaugoje $abc = 4$ – du tokius dauginamuosius. Taip iš viso gauname $x + 2y$ dauginamųjų, lygių 2. Skaičiuojant sandaugas abc, kiekvienas užrašytas skaičius 2 yra tris kartus panaudojamas kaip dauginamasis. Vadinasi,

$$x + 2y = 3m, \qquad m = (x + 2y) : 3 = 1010601 : 3 = 336867.$$

Uždavinį galima spręsti iš esmės analogiškai, bet apsieinant be žymėjimų. Kadangi $1 \cdot 1 \cdot 2 = 2$ ir $1 \cdot 2 \cdot 2 = 2 + 2$, tai sandaugų suma 2021202 yra visų atitinkamų dauginamųjų, lygių 2, suma, o skaičius $2021202 : 2$ yra tokių dauginamųjų skaičius. Kiekvienas dvejetas skaičių rate yra tris kartus panaudojamas kaip dauginamasis, todėl rate yra $(2021202 : 2) : 3 = 336867$ dvejetai.

Ats.: 336867.

4 uždavinys. Natūralųjį skaičių N vadinsime *įnulintu*, jei jis tenkina tokias dvi sąlygas:

1) visi skaičiaus N skaitmenys skirtingi, ir jei jie būtų išrikiuoti didėjimo tvarka, tai pirmasis iš jų būtų nulis, o bet kurių dviejų gretimų skaitmenų skirtumas būtų lygus 1;

2) skaičiuje N kiekvienas nenulinis skaitmuo a yra gretimas bent vienam tokiam skaitmeniui b, kad $b < a$.

Kiek yra įnulintų natūraliųjų skaičių, didesnių už 1000?

Sprendimas. Tarkime, kad skaičius N yra įnulintas. Iš eilės nagrinėdami visus jo skaitmenis nuo pirmojo skaitmens iki skaitmens 0, gausime, kad jie skaičiuje N surašyti mažėjimo tvarka. Kitaip pirmasis skaitmuo, po kurio eina už jį didesnis, netenkintų sąlygos 2). Analogiškai gauname, kad skaitmenys dešinėje nuo nulio (jei tokių esama), surašyti mažėjimo tvarka, skaitant juos iš dešinės į kairę.

Taigi kiekvienas įnulintas skaičius gaunamas, paėmus visus skaitmenis nuo 0 iki tam tikro skaitmens a, suskirsčius skaitmenis nuo 1 iki a į dvi aibes (viena iš jų gali būti tuščia) ir tada surašius skaitmenis iš pirmos aibės didėjimo tvarka dešinėje nuo nulio, o skaitmenis iš antros aibės – mažėjimo tvarka kairėje nuo nulio. Kiekvienu tokiu veiksmu sudaromas įnulintas skaičius, išskyrus vieną išimtį: kai pirmoji aibė tuščia, gautasis skaičius prasidės nuliu, o to neturėtų būti.

Pavyzdžiui, kad gautume įnulintą keturženklį skaičių, turime kiekvieną iš trijų skaitmenų 1, 2, 3 priskirti vienai iš dviejų aibių. Todėl turime $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$ galimybių. Atmetę vieną netinkamą užrašą 0123, gauname, kad yra iš viso $2^3 - 1 = 7$ įnulinti keturženkliai natūralieji skaičiai.

Analogiškai, yra $2^4 - 1$ įnulintų penkiaženklių skaičių, $2^5 - 1$ įnulintų šešiaženklių skaičių, ir t. t. Didžiausi įnulinti skaičiai – dešimtženkliai (juk skaitmenų yra tik 10). Jų yra $2^9 - 1$.

Liko visus gautus įnulintų skaičių kiekius sudėti:

$$(2^3-1)+(2^4-1)+\ldots+(2^9-1) = (2^3+2^4+\ldots+2^9)-7 = 2^3\cdot(1+2+2^2+\ldots+2^6)-7 =$$

$$= 2^3 \cdot (2^7 - 1) - 7 = 2^{10} - 8 - 7 = 1024 - 15 = 1009.$$

Ats.: 1009.

5 uždavinys. Nustatykite, kiek yra natūraliųjų skaičių $n \in (0; 250\,000)$, kuriems skaičius

$$R_n = \sqrt{\left[\sqrt{n}\right] + 2\left[\sqrt{n+1}\right] + 3\left[\sqrt{n+2}\right]}$$

yra dviejų skirtingų pirminių skaičių sandauga.

Pastaba. Čia $[x]$ žymi skaičiaus x sveikąją dalį, t. y. didžiausią sveikąjį skaičių, ne didesnį už x.

Sprendimas. Tarkime, kad natūralusis skaičius n tenkina uždavinio sąlygą, t. y. egzistuoja tokie pirminiai skaičiai p, q, kad $p < q$ ir

$$R_n^2 = \left[\sqrt{n}\right] + 2\left[\sqrt{n+1}\right] + 3\left[\sqrt{n+2}\right] = p^2 \cdot q^2.$$

Pažymėkime $k = [\sqrt{n}]$.

Kadangi

$$\sqrt{n+2} - \sqrt{n} = \frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} \leqslant \frac{2}{\sqrt{1+2}+1} < 1,$$

tai $\left[\sqrt{n+2}\right] = k$ arba $k+1$. Todėl pakanka nagrinėti tris atvejus: 1) $\left[\sqrt{n+1}\right] = \left[\sqrt{n+2}\right] = k$; 2) $\left[\sqrt{n+1}\right] = \left[\sqrt{n+2}\right] = k+1$; 3) $\left[\sqrt{n+1}\right] = k$, $\left[\sqrt{n+2}\right] = k+1$. Atitinkamai gauname $p^2 \cdot q^2 = 6k$, $6k+5$ ir $6k+3$.

1) Skaičius $p^2 \cdot q^2 = 6k$ dalijasi iš 2 ir 3, todėl $p = 2$, $q = 3$, $k = 6$. Iš tiesų kiekvienas n, kuriam $[\sqrt{n}] = \left[\sqrt{n+2}\right] = 6$, tenkina uždavinio sąlygą: $R_n = \sqrt{6+12+18} = 2 \cdot 3$. Taip bus, kai skaičiai $\sqrt{n}$ ir $\sqrt{n+2}$ bus tarp 6 ir 7:

$$6 \leqslant \sqrt{n} < \sqrt{n+2} < 7, \qquad 36 \leqslant n < 47.$$

Taigi gauname 11 tinkamų n reikšmių: 36, 37, ..., 46.

2) Skaičius $(pq-1)(pq+1) = p^2 \cdot q^2 - 1 = 6k+4$ nesidalija iš 3, todėl tarp trijų iš eilės einančių natūraliųjų skaičių $pq-1$, pq, $pq+1$ iš 3 turi dalytis vidurinysis. Tačiau $(pq)^2 = 6k+5$ taip pat nesidalija iš 3. Vadinasi, šiuo atveju tinkamų n reikšmių nėra. Tai galima įrodyti, ir pasiremiant šiuo žinomu faktu: tikslusis kvadratas visada dalijasi iš 3 su liekana 0 arba 1. Prieštarą gauname pastebėję, kad skaičius $6k+5 = 3(2k+1)+2$ dalijasi iš 3 su liekana 2.

3) Skaičius $p^2 \cdot q^2 = 6k+3$ dalijasi iš 3, bet ne iš 2, todėl $p = 3$ ir $2k+1 = 3q^2$. Jei $q \geqslant 19$, tai $2k+1 \geqslant 1\,083$, $\sqrt{n} \geqslant k > 500$, $n > 250\,000$. Todėl $q = 5$, 7, 11, 13 arba 17. Tinkamos n reikšmės kiekvienam atitinkamam $k = \frac{3q^2-1}{2}$ gaunamos iš sąlygų

$$k \leqslant \sqrt{n} < \sqrt{n+1} < k+1 \leqslant \sqrt{n+2},$$

$$k^2 \leqslant n \qquad \text{ir} \qquad n+1 < (k+1)^2 \leqslant n+2,$$

$$k^2 \leqslant n \qquad \text{ir} \qquad (k+1)^2 = n+2.$$

Taigi tinka visi $n = k^2 + 2k - 1$, kur $k = \frac{3q^2-1}{2}$, $q = 5$, 7, 11, 13, 17. Taip gauname 5 tinkamas n reišmes.

Iš viso gavome $11 + 5 = 16$ skaičiaus n reikšmių.

Ats.: 16.