68-osios Lietuvos mokinių fizikos olimpiados rajono–miesto turas (2020 m.)

12 klasė (užduotys ir sprendimai)

1. Tuščiavidurė $R = 1$ m spindulio sfera plūduriuoja ant vandens paviršiaus. Sferos centras yra $z = 10$ cm atstumu nuo vandens paviršiaus, o 1/4 sferos tūrio dalis yra panirusi žemiau vandens paviršiaus lygio. Išvedus sferą iš pusiausvyros padėties mažu atstumu x, ji pradeda laisvai svyruoti vertikalia kryptimi. Raskite šių harmoninių svyravimų periodą T_0.
Laikyti žinomais: sferos spindulį R, atstumą z, vandens tankį ρ, laisvojo kritimo pagreitį g. Į vandens judėjimą galima nekreipti dėmesio.

Sprendimas

Esant mažam nuokrypiui x nuo pusiausvyros padėties sferos centro judėjimą galime aprašyti II Niutono dėsniu:

$$ma = -\Delta F_A \qquad (1) \qquad \text{(2 taškai)}$$

čia m – sferos masė, a – sferos centro judėjimo pagreitis, ΔF_A – Archimedo jėgos pokytis esant mažam nuokrypiui x nuo pusiausvyros padėties.

Sferos masę randame iš pusiausvyroje esančio kūno sąlygos (pusiausvyros metu sunkio ir Archimedo keliamoji jėgos viena kitą atsveria):

$$mg = F_A \quad \Rightarrow m = \frac{F_A}{g} = \frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{3}\pi R^3 \rho g}{g} = \frac{\pi R^3 \rho}{3}. \qquad (2) \qquad \text{(2 taškai)}$$

Archimedo jėgos pokytis esant mažam nuokrypiui x nuo pusiausvyros padėties lygus

$$\Delta F_A = \rho g \Delta V = \rho g \cdot \pi r^2 \cdot x \qquad (3)$$

čia ΔV – panirusio rutulio tūrio dalies pokytis (kadangi x mažas, tai laikome lygiam cilindro tūriui); πr^2 – rutulio skerspjūvio plotas vandens paviršiaus lygyje esant pusiausvyrai. Be to, šio skerspjūvio spindulys yra

$$r^2 = R^2 - z^2 \qquad (4) \qquad \text{(2 taškai)}$$

Iš (1) – (4) gauname:

$$\frac{\pi R^3 \rho}{3}\cdot a = -\rho g \cdot \pi\left(R^2 - z^2\right)\cdot x \quad \Rightarrow a = -\frac{3g\left(R^2 - z^2\right)}{R^3}\cdot x \qquad \text{(2 taškai)}$$

Tai yra harmoninius svyravimus aprašanti lygtis (t.y. $a + \omega_0^2 \cdot x = 0$ arba $a = -\omega_0^2 \cdot x$, čia ω_0 – ciklinis svyravimų dažnis). Tokiu būdu randame šių harmoninių svyravimų periodą:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{R^3}{3 \cdot g \cdot \left(R^2 - z^2\right)}} = 3{,}82 \text{ s}. \qquad \text{(2 taškai)}$$

2. Vandens turbina, kurios naudingumo koeficientas $\eta = 0{,}7$, per sekundę sunaudoja V = 25 m^3 vandens. Nustatykite šios turbinos galią, jei vanduo į ją patenka v_1 = 12 m/s greičiu, o išteka v_2 = 4 m/s greičiu. Įtekančio ir ištekančio vandens aukščių skirtumas h = 6 m.

Sprendimas

Aukštyje h vandens energija lygi

$$E_1 = E_p + E_k = mgh + \frac{mv_1^2}{2}.$$ (2 taškai)

Ištekėjimo taške vandens energija lygi: $E_2 = \frac{mv_2^2}{2}.$ (1 taškas)

Vandens masė randama iš medžiagos tankio formulės: $m = \rho V$.

Turbinos atliekamas darbas lygus

$$A = E_1 - E_2 = mgh + \frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_2^2}{2}.$$ (1 taškas)

Kaip žinoma, galia apibrėžiama kaip

$$N_v = \frac{A}{t}.$$ (1 taškas)

Tada

$$N_v = \frac{m}{t}\left(gh + \frac{v_1^2}{2} - \frac{v_2^2}{2}\right).$$ (1 taškas)

Pasinaudoję ankstesnėmis formulėmis randame

$$N_v = \frac{\rho V}{t}\left(gh + \frac{v_1^2}{2} - \frac{v_2^2}{2}\right).$$ (1 taškas)

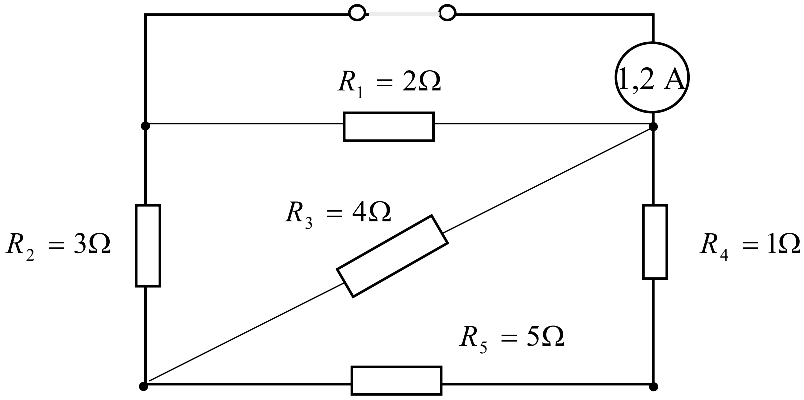
Atsižvelgdami į naudingumo koeficientą, galime užrašyti

$\eta = \frac{A_n}{A_v} = \frac{N_n}{N_v}$. Tada $N_n = \frac{\rho V \eta}{t}\left(gh + \frac{v_1^2}{2} - \frac{v_2^2}{2}\right).$ (2 taškai)

Įrašę skaitines reikšmes apskaičiuojame

$$N_n = \frac{1000\ \mathrm{kg/m^3} \cdot 25\mathrm{m^3} \cdot 0{,}7}{1\mathrm{s}}\left(10\ \mathrm{m/s^2} \cdot 6\mathrm{m} + \frac{(12\mathrm{m/s})^2}{2} - \frac{(4\mathrm{m/s})^2}{2}\right) \approx 2170\ \mathrm{kW}.$$ (1 taškas)

3. Duota elektrinės grandinės schema. Apskaičiuokite, koks šilumos kiekis išsiskirs rezistoriuje R_3 per vieną minutę. Ampermetro varža labai maža.



Sprendimas

Visa grandinės varža:

$$R_g = \frac{R_1 \cdot \left(R_2 + \frac{(R_5 + R_4)R_3}{R_4 + R_5 + R_3} \right)}{R_1 + R_2 + \frac{(R_5 + R_4)R_3}{R_4 + R_5 + R_3}} = \frac{2 \cdot \left(3 + \frac{(5+1)\cdot 4}{1+5+4} \right)}{2 + 3 + \frac{(5+1)\cdot 4}{1+5+4}} = \frac{2 \cdot \left(3 + \frac{24}{10} \right)}{5 + \frac{24}{10}} \approx 1{,}46(\Omega) \qquad \text{(3 taškai)}$$

Grandinės įtampa apskaičiuojama pagal Omo dėsnį grandinės daliai:

$$U = R_g I_g = 1{,}46 \cdot 1{,}2 \approx 1{,}75\,(\text{V}). \qquad \text{(1 taškas)}$$

Apskaičiuojame srovės, tekančios per rezistorių R_2, stiprį:

$$I_2 = \frac{U}{R_2 + \frac{(R_5 + R_4)R_3}{R_4 + R_5 + R_3}} \approx 0{,}324\,(\text{A}) = 324\,(\text{mA}) \;. \qquad \text{(1 taškas)}$$

Įtampa, tenkanti rezistoriui R_3, lygi

$$U_3 = \frac{(R_5 + R_4)R_3}{R_4 + R_5 + R_3} \cdot I_2 \approx 0{,}778\,(\text{V}) = 778\,(\text{mV}). \qquad \text{(1 taškas)}$$

Tada apskaičiuojame srovės, tekančios rezistoriumi R_3, ,stiprį:

$$I_3 = \frac{U_3}{R_3} = 0{,}195\,(\text{A}) \approx 195\,(\text{mA}) \;. \qquad \text{(1 taškas)}$$

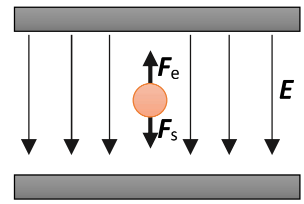
Tuo būdu rezistoriuje R_3 išsiskiria galia $P = U_3 \cdot I_3 = \frac{A}{t}$. (1 taškas)

Ieškoma šiluma, išsiskirianti per $t = 1\ \text{min} = 60\ \text{s}$, lygi

$$Q = A = P \cdot t = U_3 \cdot I_3 \cdot t = \frac{U_3^2}{R_3} \cdot t = I_3^2 \cdot R_3 \cdot t \approx 9{,}1\,(\text{J}) \qquad \text{(2 taškai)}$$

4. Milikeno eksperimento metu stebimas tarp dviejų lygiagrečių horizontalių plokštelių pakibęs mažas alyvos lašelis. Tarkime, kad įtampa tarp plokštelių yra U = 2033 V, o tarpas tarp jų $h = 2\ \mathrm{cm}$. Lašelio skersmuo $d = 4 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{m}$, o alyvos tankis $\rho = 0{,}81\ \mathrm{g/cm^3}$. Raskite laisvųjų elektronų, esančių lašelyje, skaičių n. Plokštelių matmenys žymiai didesni už tarpą tarp jų. Vieno elektrono krūvis $e = -1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C}$.

Sprendimas



$$F_\mathrm{e} = qE\,;\ E = \frac{U}{d}.$$ (2 taškai)

Čia F_e – elektrostatinė jėga, q – lašelio visas krūvis, E – elektrinio lauko tarp plokštelių stipris.

Lašelio sunkio jėga $F_\mathrm{s} = mg$. (1 taškas)

Vieno lašelio masė

$$m = \rho V = \rho\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) = \rho\left[\frac{4}{3}\pi\left(\frac{d}{2}\right)^3\right] = \rho\pi\frac{d^3}{6}.$$ (2 taškai)

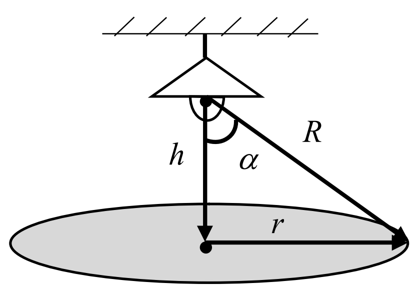
Elektrostatinės ir sunkio jėgų lygybės (pusiausvyros) atveju

$$F_\mathrm{e} = F_\mathrm{s} \Rightarrow q\frac{U}{h} = mg \quad \Rightarrow \quad q = \frac{mgh}{V} = \frac{\pi\rho d^3 gh}{6U}.$$ (3 taškai)

Taigi, $$n = \left|\frac{q}{e}\right| = \frac{\pi\rho d^3 gh}{6U|e|} \approx 16.$$ (2 taškai)

4. Apskritimo formos r = 2 m spindulio aikštelę reikia apšviesti vienu virš aikštelės centro pakabintu šviestuvu. Kokiame aukštyje reikia pakabinti šviestuvą, kad aikštelės kraštai būtų apšviesti labiausiai?

Sprendimas



Brėžinys (1 taškas)

Apšvieta $E=\frac{\Phi}{S_{sferos}}$, $\Phi=4\pi\cdot I$ $(\mathrm{sr}\cdot\mathrm{cd})$ $\rightarrow E=\frac{4\pi\cdot I}{4\pi R^2}=\frac{I}{R^2}$, kai R su h sudaro nulinį kampą $\alpha=0$, t.y. kai apšviečiamas plotas yra statmenas tiesei, jungiančiai šį plotą su šviesos šaltiniu. (2 taškai)

Kai $\alpha>0$ tuomet apšvieta nuo aikštelės centro iki jos krašto atstumu r nusakoma tokia išraiška:

$$E=\frac{I}{R^2}\cos\alpha\,. \qquad \text{(1 taškas)}$$

Kadangi $R\cdot\cos\alpha=h\rightarrow\cos\alpha=\frac{h}{R}$, tuomet apšvieta ties aikštelės kraštais yra $E=\frac{I\cdot h}{R^3}$. (2 taškai)

Iš stačiojo trikampio Pitagoro teoremos $R^2=h^2+r^2$. Tuomet apšvieta kaip funkcija nuo pakabinimo aukščio h:

$$E(h)=\frac{I\cdot h}{\sqrt{\left(h^2+r^2\right)^3}}\,. \qquad \text{(1 taškas)}$$

Uždavinys reikalauja rasti tokį šviestuvo pakabinimo aukštį h, kad aikštelės kraštus apšviestų labiausiai, vadinasi, reikia rasti apšvietos funkcijos $E(h)$ ekstremumą, kad ji būtų maksimali.

Funkcijos $E(h)$ išvestinę aukščio h atžvilgiu reikia prilyginti nuliui:

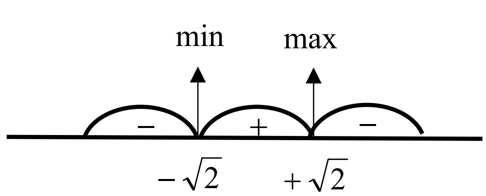
$$E'(h)=I\cdot\left(\frac{h}{\sqrt{\left(h^2+r^2\right)^3}}\right)'=0$$

$$\left(\frac{h}{\sqrt{\left(h^2+r^2\right)^3}}\right)'=\frac{h'\left(\sqrt{\left(h^2+r^2\right)^3}\right)-\frac{3}{2}h\cdot\left(\sqrt{h^2+r^2}\right)\cdot\left(h^2+r^2\right)'}{\left(h^2+r^2\right)^3}=\frac{\sqrt{\left(h^2+r^2\right)^3}-3\cdot h^2\cdot\sqrt{h^2+r^2}}{\left(h^2+r^2\right)^3}=0$$

(2 taškai)

Kadangi $\left(h^2+r^2\right)\neq 0$, tai $\sqrt{\left(h^2+r^2\right)^3}-3\cdot h^2\sqrt{h^2+r^2}=0 \;\rightarrow\; h^2+r^2-3h^2=0 \;\rightarrow\; r^2-2h^2=0$.

Iš čia $h_{\text{ekstr}}=\pm\frac{r}{\sqrt{2}}=\pm\sqrt{2}$ m.



Be to, tinkami tik teigiami $h>0$. Vadinasi, aikštelės kraštai bus labiausiai apšviesti, kai šviestuvas pakabintas $h_{\text{ekstr}}=\sqrt{2}$ m aukštyje, t.y. $h\approx 1{,}41$ m. (1 taškas)