Lietuvos mokinių matematikos olimpiada
Rajono (miesto) etapo užduotys 9 - 10 klasei
2020 m.

1 uždavinys.

a) Kiek yra natūraliųjų triženklių skaičių, kurių paskutinis skaitmuo lygus kitų dviejų skaitmenų sumai?

b) Kiek yra natūraliųjų triženklių skaičių, kurių paskutinis skaitmuo lygus kitų dviejų skaitmenų sumai arba sandaugai?

2 uždavinys. Begalinės šachmatų lentos (į langelius padalytos plokštumos) langelyje stovi bokštas. Pirmuoju ėjimu jis eina horizontaliai per vieną langelį (t. y. į langelį, gretimą pradiniam). Antruoju ėjimu bokštas eina vertikaliai per du langelius (t. y. peršokdamas vieną langelį). Bendru atveju n-tuoju ėjimu bokštas eina per n langelių horizontaliai arba vertikaliai, kai n yra atitinkamai nelyginis arba lyginis.

a) Įrodykite, kad bokštas gali grįžti į pradinį langelį.

b) Nustatykite, kiek mažiausiai ėjimų reikia, kad bokštas grįžtų į pradinį langelį.

3 uždavinys. Kvadrato $EFGH$ kraštinės GH vidurio taškas sutampa su kvadrato $ABCD$ centru. Taškai A, B, C, D, E, F priklauso vienam apskritimui. Raskite kvadratų $ABCD$ ir $EFGH$ plotų santykį.

4 uždavinys. Raskite lygčių sistemos

$$\begin{cases} x^2 + 3xy - 3x = -27, \\ y^2 - xy - 3y = 25 \end{cases}$$

visus realiuosius sprendinius (x, y).

5 uždavinys. Natūralųjį skaičių n dalijant su liekana iš $1, 2, 3, \ldots, n$, atitinkamai gautos liekanos $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n$ (jei n dalijasi iš k, tai $r_k = 0$). Visų n liekanų suma lygi $2n$. Raskite visas galimas skaičiaus n reikšmes.

Kiekvienas uždavinys vertinamas 5 taškais.

Lietuvos mokinių matematikos olimpiada
Rajono (miesto) etapo užduočių 9 - 10 klasei sprendimai
2020 m.

1 uždavinys.

a) Kiek yra natūraliųjų triženklių skaičių, kurių paskutinis skaitmuo lygus kitų dviejų skaitmenų sumai?

b) Kiek yra natūraliųjų triženklių skaičių, kurių paskutinis skaitmuo lygus kitų dviejų skaitmenų sumai arba sandaugai?

Sprendimas. a) Perrinkime atvejus. Kai paskutinis skaitmuo lygus 9, gauname 9 skaičius 189, 279, 369, 459, 549, 639, 729, 819, 909. Toliau analogiškai randame: 8 skaičius $178, \dots, 808$; 7 skaičius $167, \dots, 707$; 6 skaičius $156, \dots, 606$; 5 skaičius $145, \dots, 505$; 4 skaičius $134, \dots, 404$; 3 skaičius 123, 213, 303; 2 skaičius 112, 202 ir skaičių 101.

Galima mąstyti ir abstrakčiau: triženklis skaičius $\overline{ABC}$ tenkina sąlygą, kai $A = C - B$ ir $B < C$ (nes $A > 0$). Todėl $C > 0$, ir kiekvienam tokiam C galime parinkti C skirtingų skaitmens B reikšmių $0, 1, \dots, C - 1$ bei atitinkamai $A = C$, $C - 1$, …, 1.

Gauname iš viso $1 + 2 + \ldots + 9 = 45$ tinkamus skaičius.

b) Suskaičiuokime, kiek yra tinkamų skaičių, kurių paskutinis skaitmuo lygus kitų dviejų skaitmenų sandaugai. Vėl galima perrinkti visas paskutinio skaitmens reikšmes. Bet patogiau pirmiausiai išvardyti visus tinkamus skaičius, turinčius skaitmenį 1 arba 0. Tai 9 skaičiai 100, 200, …, 900, skaičius 111 ir $8 \cdot 2 = 16$ skaičių 122, 212, 133, 313, …, 199, 919. Kadangi $A \cdot 0 \neq A + 0$, kai $A \neq 0$, ir $A \cdot 1 \neq A + 1$, tai joks iš šių skaičių netenkina a) dalies sąlygos.

Kai abu pirmieji skaitmenys yra didesni už 1, gauname 6 skaičius 224, 236, 248, 326, 339, 428. Vienas iš jų (224) tenkina a) dalies sąlygą. Gauname 32 skaičius, iš kurių 31 netenkina a) dalies sąlygos, o a) dalyje gavome 45 skaičius.

Iš viso gauname $31 + 45 = 76$ tinkamus skaičius.

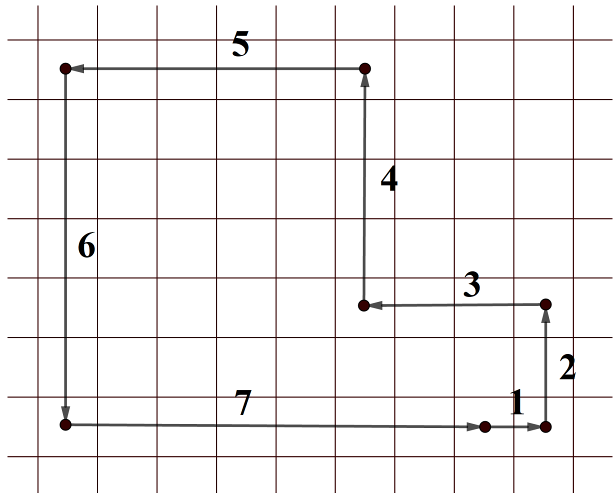
Ats.: a) 45; b) 76.

2 uždavinys. Begalinės šachmatų lentos (į langelius padalytos plokštumos) langelyje stovi bokštas. Pirmuoju ėjimu jis eina horizontaliai per vieną langelį (t. y. į langelį, gretimą pradiniam). Antruoju ėjimu bokštas eina vertikaliai per du langelius (t. y. peršokdamas vieną langelį). Bendru atveju n-tuoju ėjimu bokštas eina per n langelių horizontaliai arba vertikaliai, kai n yra atitinkamai nelyginis arba lyginis.

a) Įrodykite, kad bokštas gali grįžti į pradinį langelį.

b) Nustatykite, kiek mažiausiai ėjimų reikia, kad bokštas grįžtų į pradinį langelį.

Sprendimas. a) Pavyzdžiui, bokštas gali grįžti į pradinį langelį 7 ėjimais, jei iš eilės eis dešinėn, aukštyn, kairėn, aukštyn, kairėn, žemyn, dešinėn (žr. pav.).



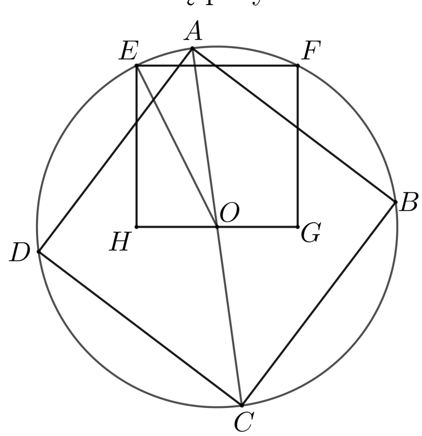
b) Įrodykime, kad mažiau nei 7 ėjimų nepakaks. Tam, kad bokštas grįžtų į pradinį stulpelį, jis savo nelyginiais ėjimais turi nueiti per tiek pat langelių kairėn ir dešinėn. Jei ėjimų yra mažiau nei 7, tai nelyginiais ėjimais bokštas nuėjo per 1 langelį (ir pateko į gretimą stulpelį) arba per 1 ir 3 langelius, t. y. iš viso per $1+3=4$ arba $3-1=2$ stulpelius, arba per 1, 3 ir 5 langelius, t. y. iš viso per $4+5=9$, $2+5=7$, $5-4=1$ arba $5-2=3$ stulpelius. Taigi nė vienu atveju bokštas į pradinį stulpelį negrįš.

Kad 7 ėjimų pakanka, įsitikinome a) dalyje.

Ats.: b) 7.

3 uždavinys. Kvadrato $EFGH$ kraštinės GH vidurio taškas sutampa su kvadrato $ABCD$ centru. Taškai A, B, C, D, E, F priklauso vienam apskritimui. Raskite kvadratų $ABCD$ ir $EFGH$ plotų santykį.

Sprendimas. Apskritimo $ABCD$ centrą pažymėkime O.



Tada $OA = OB = OC = OD$, ir apskritimas su centru O bei spinduliu OA yra tas vienintelis apskritimas, kuris apibrėžtas apie trikampį ABC ir kuriam priklauso taškai D, E, F. Pažymėkime $R = OA$. Trikampiams ABC ir OHE pritaikykime Pitagoro teoremą:

$$2AB^2 = AB^2 + BC^2 = AC^2 = (AO + OC)^2 = (R + R)^2 = 4R^2,$$

$$R^2 = OE^2 = OH^2 + HE^2 = (GH/2)^2 + GH^2 = 5GH^2/4.$$

Kvadratų plotų santykis lygus

$$\frac{AB^2}{GH^2} = \frac{2R^2}{\frac{4R^2}{5}} = 2{,}5.$$

Ats.: 2,5.

4 uždavinys. Raskite lygčių sistemos

$$\begin{cases} x^2 + 3xy - 3x = -27, \\ y^2 - xy - 3y = 25 \end{cases}$$

visus realiuosius sprendinius (x, y).

Sprendimas. Sudėkime duotąsias lygtis ir pažymėkime $u = x + y$:

$$-2 = -27 + 25 = x^2 + 2xy + y^2 - 3x - 3y = u^2 - 3u.$$

Kvadratinės lygties $u^2 - 3u + 2 = 0$ sprendiniai yra 1 ir 2. Kai $u = 1$, gauname

$$y = 1 - x, \quad -27 = x^2 + 3x(1 - x) - 3x = -2x^2, \quad x = \pm\frac{3\sqrt{6}}{2}, \quad y = 1 \mp \frac{3\sqrt{6}}{2}.$$

Kai $u = 2$, analogiškai gauname

$$y = 2 - x, \quad -27 = x^2 + 3x(2 - x) - 3x = -2x^2 + 3x,$$

$$x = -3, \quad y = 5 \quad \text{arba} \quad x = 4{,}5, \quad y = -2{,}5.$$

Gautieji keturi sprendiniai tenkina pirmąją duotosios sistemos lygtį. Kad jie tenkina ir antrąją, galima patikrinti tiesiogiai. Tačiau pakanka pastebėti, kad jie tenkina vieną iš lygybių $x + y = 1$ ir $x + y = 2$ ir todėl tenkina sistemos lygčių sumą. Vadinasi, kartu tenkindami pirmąją lygtį, tenkina ir antrąją.

Ats.: $\left(\frac{3\sqrt{6}}{2}, 1 - \frac{3\sqrt{6}}{2}\right)$, $\left(-\frac{3\sqrt{6}}{2}, 1 + \frac{3\sqrt{6}}{2}\right)$, $(-3, 5)$, $\left(4\frac{1}{2}, -2\frac{1}{2}\right)$.

5 uždavinys. Natūralųjį skaičių n dalijant su liekana iš $1, 2, 3, \ldots, n$, atitinkamai gautos liekanos $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n$ (jei n dalijasi iš k, tai $r_k = 0$). Visų n liekanų suma lygi $2n$. Raskite visas galimas skaičiaus n reikšmes.

Sprendimas. Įrodysime, kad n netenkina sąlygos, jei yra pakankamai didelis.

Tarkime, kad skaičius n tenkina uždavinio sąlygą. Nagrinėkime du atvejus.

Tarkime, kad skaičius $n = 2m$ lyginis. Jei $m + 8 \leqslant 2m$, tai

$$2n \geqslant r_{m+1}+r_{m+2}+\ldots+r_{m+8} = (m-1)+(m-2)+\ldots+(m-8) = 8m-36 = 2n+4m-36,$$

$4m - 36 \leqslant 0$ ir $m \leqslant 9$. Jei $m + 8 > 2m$, tai $m < 8$.

Tarkime, kad skaičius $n = 2m + 1$ nelyginis. Jei $m + 8 \leqslant 2m + 1$, tai

$$2n \geqslant r_{m+1}+r_{m+2}+\ldots+r_{m+8} = m+(m-1)+\ldots+(m-7) = 8m-28 = 2n+4m-30,$$

$4m - 30 \leqslant 0$ ir $m \leqslant 7$. Jei $m + 8 > 2m + 1$, tai $m < 7$.

Taigi, $n \leqslant 16$ arba $n = 18$. Pastaruoju atveju gauname prieštarą: $36 \geqslant r_4+r_{10}+r_{11}+ +\ldots+r_{17} = 2+8+7+\ldots+1 = 38$. Likusius atvejus taip pat tikrinkime tiesiogiai. Kai $n = 1, 2, \ldots, 16$, gauname liekanų sumą, atitinkamai lygią 0, 0, 1, 1, 4, 3, 8, 8, 12, 13, 22, 17, 28, 31, 36, 36. Kad skaičiavimai būtų greitesni, paranku pastebėti, kad kaskart nuo vidurio (nuo r_{m+1}) liekanos dėsningai mažėja (sudaro aritmetinę progresiją). Sąlygą tenkina tik $n = 11$.

Ats.: 11.

Lietuvos mokinių matematikos olimpiada
Rajono (miesto) etapo užduotys 11 – 12 klasei
2020 m.

1 uždavinys.

a) Kiek yra natūraliųjų triženklių skaičių, kurių paskutinis skaitmuo lygus kitų dviejų skaitmenų sumai?

b) Kiek yra natūraliųjų triženklių skaičių, kurių paskutinis skaitmuo lygus kitų dviejų skaitmenų sumai arba sandaugai?

2 uždavinys. Dviračių lenktynėse keli dviratininkai važiavo gulsčiąja trasos dalimi tuo pačiu pastoviu 40 km/h greičiu. Jų sudaromos vilkstinės ilgis buvo 200 m. Tolimesnė trasos dalis yra įkalnė, todėl joje kiekvienas iš vilkstinės dviratininkų važiavo pastoviu 24 km/h greičiu. Koks buvo vilkstinės ilgis, kai visi šie dviratininkai važiavo įkalne?

3 uždavinys. Daina sukarpė popieriaus lapą į $n > 1$ lapelių ir juose įrašė skaičius $1, 2, 3, \ldots, 14$, kiekvieną skaičių panaudodama po lygiai vieną kartą. Kiekviename lapelyje įrašytų skaičių suma yra tokia pati (joks lapelis neliko tuščias, o jei lapelyje įrašytas vienas skaičius, tai suma lygi tam skaičiui). Raskite visas galimas n reikšmes.

4 uždavinys. Lygiašonio trikampio ABC kampas B statusis. Taškai M ir N atitinkamai dalija kraštines AC ir BC pusiau. Tiesėje BM pažymėtas toks taškas X, kad $\angle ANX = 90°$. Raskite atkarpos AX ilgį, jei $AB = 1$.

5 uždavinys. Apskaičiuokite

$$\frac{64^x + 729^x}{144^x + 324^x},$$

jei

$$\frac{8^x + 27^x}{12^x + 18^x} = 5.$$

Kiekvienas uždavinys vertinamas 5 taškais.

```
Lietuvos mokinių matematikos olimpiada
Rajono (miesto) etapo užduočių 11 - 12 klasei sprendimai
2020 m.
```

1 uždavinys.

a) Kiek yra natūraliųjų triženklių skaičių, kurių paskutinis skaitmuo lygus kitų dviejų skaitmenų sumai?

b) Kiek yra natūraliųjų triženklių skaičių, kurių paskutinis skaitmuo lygus kitų dviejų skaitmenų sumai arba sandaugai?

Sprendimas. a) Perrinkime atvejus. Kai paskutinis skaitmuo lygus 9, gauname 9 skaičius 189, 279, 369, 459, 549, 639, 729, 819, 909. Toliau analogiškai randame: 8 skaičius $178, \ldots, 808$; 7 skaičius $167, \ldots, 707$; 6 skaičius $156, \ldots, 606$; 5 skaičius $145, \ldots, 505$; 4 skaičius $134, \ldots, 404$; 3 skaičius 123, 213, 303; 2 skaičius 112, 202 ir skaičių 101.

Galima mąstyti ir abstrakčiau: triženklis skaičius $\overline{ABC}$ tenkina sąlygą, kai $A = C - B$ ir $B < C$ (nes $A > 0$). Todėl $C > 0$, ir kiekvienam tokiam C galime parinkti C skirtingų skaitmens B reikšmių $0, 1, \ldots, C-1$ bei atitinkamai $A = C$, $C-1$, …, 1.

Gauname iš viso $1 + 2 + \ldots + 9 = 45$ tinkamus skaičius.

b) Suskaičiuokime, kiek yra tinkamų skaičių, kurių paskutinis skaitmuo lygus kitų dviejų skaitmenų sandaugai. Vėl galima perrinkti visas paskutinio skaitmens reikšmes. Bet patogiau pirmiausiai išvardyti visus tinkamus skaičius, turinčius skaitmenį 1 arba 0. Tai 9 skaičiai 100, 200, …, 900, skaičius 111 ir $8 \cdot 2 = 16$ skaičių 122, 212, 133, 313, …, 199, 919. Kadangi $A \cdot 0 \neq A + 0$, kai $A \neq 0$, ir $A \cdot 1 \neq A + 1$, tai joks iš šių skaičių netenkina a) dalies sąlygos.

Kai abu pirmieji skaitmenys yra didesni už 1, gauname 6 skaičius 224, 236, 248, 326, 339, 428. Vienas iš jų (224) tenkina a) dalies sąlygą. Gauname 32 skaičius, iš kurių 31 netenkina a) dalies sąlygos, o a) dalyje gavome 45 skaičius.

Iš viso gauname $31 + 45 = 76$ tinkamus skaičius.

Ats.: a) 45; b) 76.

2 uždavinys. Dviračių lenktynėse keli dviratininkai važiavo gulsčiąja trasos dalimi tuo pačiu pastoviu 40 km/h greičiu. Jų sudaromos vilkstinės ilgis buvo 200 m. Tolimesnė trasos dalis yra įkalnė, todėl joje kiekvienas iš vilkstinės dviratininkų važiavo pastoviu 24 km/h greičiu. Koks buvo vilkstinės ilgis, kai visi šie dviratininkai važiavo įkalne?

Sprendimas. Nagrinėkime pirmąjį ir paskutinįjį vilkstinės dviratininkus. Pažymėkime juos atitinkamai A ir B. Kai A atsidūrė naujoje trasos dalyje, atstumas tarp A ir B buvo 200 metrų. Todėl B (ir kartu visa vilkstinė tarp A ir B) atsidūrė įkalnėje per $0{,}2 : 40 = \frac{1}{200}$ (h). Per tą laiką A nuvažiavo įkalne $\frac{1}{200} \cdot 24 = 0{,}12$ (km). Taigi tuo metu atstumas tarp A ir B (vilkstinės ilgis) sumažėjo iki 120 metrų. Toliau visi dviratininkai važiavo tuo pačiu greičiu, todėl vilkstinės ilgis nekito.

Ats.: 120 m.

3 uždavinys. Daina sukarpė popieriaus lapą į $n > 1$ lapelių ir juose įrašė skaičius $1, 2, 3, \ldots, 14$, kiekvieną skaičių panaudodama po lygiai vieną kartą. Kiekviename lapelyje įrašytų skaičių suma yra tokia pati (joks lapelis neliko tuščias, o jei lapelyje įrašytas vienas skaičius, tai suma lygi tam skaičiui). Raskite visas galimas n reikšmes.

Sprendimas. Kiekvieno lapelio skaičių sumą pažymėkime s. Tada $ns = 1 + 2 + \ldots + 14 = 105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$. Skaičius s dalija skaičių 105, ir jo galimos reikšmės yra $s = 1$, 3, 5, 7, 15, 21, 35, 105. Kadangi $n > 1$, o viename iš lapelių įrašytas skaičius 14, tai $14 \leqslant s < 105$. Lieka trys atvejai.

Jei $s = 15$, tai $n = 7$. Skaičiai 7 lapeliuose gali būti tokie:

$$1, 14; \quad 2, 13; \quad 3, 12; \quad 4, 11; \quad 5, 10; \quad 6, 9; \quad 7, 8.$$

Jei $s = 21$, tai $n = 5$. Skaičiai 5 lapeliuose gali būti tokie:

$$1, 7, 13; \quad 2, 5, 14; \quad 3, 6, 12; \quad 10, 11; \quad 4, 8, 9.$$

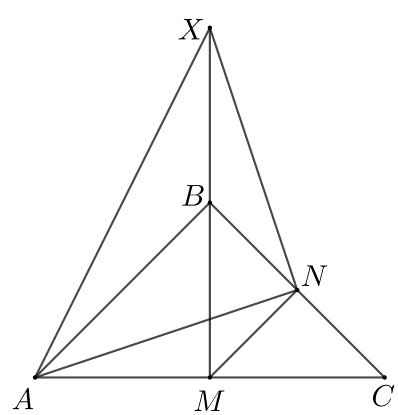
Jei $s = 35$, tai $n = 3$. Skaičiai trijuose lapeliuose gali būti tokie:

$$8, 13, 14; \quad 2, 10, 11, 12; \quad 1, 3, 4, 5, 6, 7, 9.$$

Ats.: 3, 5, 7.

4 uždavinys. Lygiašonio trikampio ABC kampas B statusis. Taškai M ir N atitinkamai dalija kraštines AC ir BC pusiau. Tiesėje BM pažymėtas toks taškas X, kad $\angle ANX = 90°$. Raskite atkarpos AX ilgį, jei $AB = 1$.

Sprendimas.



Lygiašonio trikampio ABC pusiaukraštinė BM kartu yra jo pusiaukampinė ir aukštinė, todėl trikampio BMC kampai yra $90°$, $45°$, $45°$. Taigi šis trikampis yra statusis lygiašonis. Analogiškai, jo pusiaukraštinė MN dalija jį į stačiuosius lygiašonius trikampius BMN ir CMN. Įrodykime, kad statusis trikampis ANX taip pat lygiašonis.

Kadangi $\angle BNM = \angle ANX$, tai $\angle ANM = \angle XNB$. Be to, $\angle AMN = 180° - 45° = = \angle XBN$ ir $MN = BN$. Vadinasi, trikampiai AMN ir XBN lygūs pagal kraštinę ir du kampus. Tada $NA = NX$.

Galimas ir kitoks įrodymas. Kadangi $\angle AMX = 90° = \angle ANX$, tai keturkampis $AMNX$ įbrėžtinis ir $\angle AXN = 180° - \angle AMN = \angle CMN = 45°$. Tada trikampio ANX kampai yra $45°$, $90°$, $180° - 90° - 45° = 45°$, ir $NA = NX$.

Pritaikykime Pitagoro teoremą trikampiams ABN ir ANX:

$$AN^2 = AB^2 + BN^2 = AB^2 + (BC/2)^2 = AB^2 + (AB/2)^2 = \frac{5}{4},$$

$$AX^2 = NA^2 + NX^2 = 2NA^2 = \frac{5}{2}, \quad AX = \frac{\sqrt{10}}{2}.$$

Ats.: $\frac{\sqrt{10}}{2}$.

5 uždavinys. Apskaičiuokite

$$\frac{64^x + 729^x}{144^x + 324^x},$$

jei

$$\frac{8^x + 27^x}{12^x + 18^x} = 5.$$

Sprendimas. Pažymėkime $u = 2^x$, $v = 3^x$, $y = \frac{u}{v} = \left(\frac{2}{3}\right)^x$. Tada

$$5 = \frac{8^x + 27^x}{12^x + 18^x} = \frac{u^3 + v^3}{u^2v + uv^2} = \frac{(u+v)(u^2 - uv + v^2)}{uv(u+v)} =$$

$$= \frac{u^2 - uv + v^2}{uv} = \frac{u}{v} + \frac{v}{u} - 1 = y + \frac{1}{y} - 1,$$

$$y + \frac{1}{y} = 6, \quad y^2 + 2 + \frac{1}{y^2} = \left(y + \frac{1}{y}\right)^2 = 36, \quad y^2 + \frac{1}{y^2} = 34,$$

$$\frac{64^x + 729^x}{144^x + 324^x} = \frac{u^6 + v^6}{u^4v^2 + u^2v^4} = \frac{(u^2 + v^2)(u^4 - u^2v^2 + v^4)}{u^2v^2(u^2 + v^2)} =$$

$$= \frac{u^4 - u^2v^2 + v^4}{u^2v^2} = \frac{u^2}{v^2} + \frac{v^2}{u^2} - 1 = y^2 + \frac{1}{y^2} - 1 = 34 - 1 = 33.$$

Ats.: 33.