

Lietuvos mokinių matematikos olimpiada
Rajono (miesto) etapo užduotys 9-10 klasei
2019 m.

1 uždavinys. Raminta ir Gerda pasiėmė po krūvelę monetų ir 20 kartų keitėsi monetomis. Pirmieji 10 apsigkeitimų buvo tokie: Raminta Gerdai atiduodavo trečdalį tuo metu savo turimų monetų, o Gerda Ramintai atiduodavo du trečdalius tuo metu savo turimų monetų. Likusių 10 apsigkeitimų metu Raminta Gerdai atiduodavo tris penktadalius tuo metu savo turimų monetų, o Gerda Ramintai – du penktadalius. Kaskart mergaitės atiduodavo viena kitai monetas tuo pačiu metu (o ne viena po kitos). Pabaigoje Raminta turėjo 72 monetas. Kiek monetų turėjo Gerda po penktojo apsigkeitimo?

2 uždavinys. Natūralųjį skaičių vadinsime *šiūmečiu*, jei jo skaitmenų suma lygi 2019. Visus šiūmečius natūraliuosius skaičius išrikiuokime didėjimo tvarka:

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

- a) Raskite a_1 .
- b) Keliais nuliais baigiasi skaičius $a_{100} + 1$?

3 uždavinys. Trikampio ABC kraštinės AB ir BC lygios. Jose atitinkamai pažymėti tokie taškai M ir N , kad $BN = NM = MA$ ir $BM = AC$. Raskite trikampio ABC kampus.

4 uždavinys. Natūralųjį skaičių n vadinsime *uždvejinamu*, jei egzistuoja toks natūralusis skaičius a , kad skaičiaus $n \cdot a$ dešimčių (t. y. antrasis nuo galo) skaitmuo yra 2. Keli natūralieji skaičiai nuo 1 iki 999 **nėra** uždvejinami?

5 uždavinys. Raskite visus lygčių sistemos

$$\begin{cases} 2x + 3\{y\} = -4,5, \\ 6\{x\} + 7y = 8,9 \end{cases}$$

realiuosius sprendinius (x, y) .

Pastaba. Kiekvienam realiajam skaičiui a didžiausias sveikasis skaičius, neviršijantis a , vadinamas skaičiaus a sveikąja dalimi ir žymimas $[a]$, o skaičius $a - [a]$ vadinamas skaičiaus a trupmenine dalimi ir žymimas $\{a\}$.

Kiekvienas uždavinys vertinamas 5 taškais.

Lietuvos mokinių matematikos olimpiada
Rajono (miesto) etapo užduočių 9-10 klasei sprendimai
2019 m.

1 uždavinys. Raminta ir Gerda pasiėmė po krūvelę monetų ir 20 kartų keitėsi monetomis. Pirmieji 10 apsigkeitimų buvo tokie: Raminta Gerdai atiduodavo trečdalį tuo metu savo turimų monetų, o Gerda Ramintai atiduodavo du trečdalius tuo metu savo turimų monetų. Likusių 10 apsigkeitimų metu Raminta Gerdai atiduodavo tris penktadalius tuo metu savo turimų monetų, o Gerda Ramintai – du penktadalius. Kaskart mergaitės atiduodavo viena kitai monetas tuo pačiu metu (o ne viena po kitos). Pabaigoje Raminta turėjo 72 monetas. Kiek monetų turėjo Gerda po penktojo apsigkeitimo?

Sprendimas. Jei prieš bet kurį iš 10 pirmųjų apsigkeitimų Raminta turėjo x monetų, o Gerda – y monetų, tai to apsigkeitimo metu Raminta prarado $\frac{x}{3}$, o įgijo $\frac{2y}{3}$ monetų. Tada po apsigkeitimo Raminta jau turėjo

$$x - \frac{x}{3} + \frac{2y}{3} = \frac{2(x+y)}{3}$$

monetų. Analogiškai Gerda po apsigkeitimo turėjo $\frac{x+y}{3}$ monetų. Ramintos ir Gerdos turimų monetų santykis tapo $2 : 1$. Analogiškai randama, kad po kiekvieno iš paskutiniųjų 10 apsigkeitimų tas santykis buvo $2 : 3$. Vadinasi, pabaigoje Gerda turėjo $\frac{3}{2} \cdot 72 = 108$ monetas.

Iš viso monetų buvo $72 + 108 = 180$. Po penktojo apsigkeitimo Raminta jų turėjo dvigubai daugiau nei Gerda, t. y. Raminta turėjo 2 iš $2 + 1 = 3$ dalių, o Gerda – vieną iš 3 dalių, trečdalį monetų. Vadinasi, po penktojo apsigkeitimo Gerda turėjo $180 : 3 = 60$ monetų.

Pastaba. Iš sprendimo lengvai išplaukia, kad Raminta ir Gerda po kiekvieno iš pirmųjų 10 apsigkeitimų vis turėdavo atitinkamai po 120 ir 60 monetų, o po kiekvieno iš paskutiniųjų 10 apsigkeitimų – atitinkamai po 72 ir 108 monetas. O štai po kiek monetų jos turėjo pradžioje, nustatyti neįmanoma.

Ats.: 60.

2 uždavinys. Natūralųjį skaičių vadinsime *šiužmečiu*, jei jo skaitmenų suma lygi 2019. Visus šiužmečius natūraliuosius skaičius išrikiuokime didėjimo tvarka:

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

- Raskite a_1 .
- Keliais nuliais baigiasi skaičius $a_{100} + 1$?

Sprendimas. Mažesni yra tie šiūmečiai skaičiai, kurie turi mažiau skaitmenų. Tarp šiūmečių skaičių, turinčių po lygiai skaitmenų, mažesni yra tie, kurių pirmasis skaitmuo mažesnis. Tarp šiūmečių skaičių, turinčių po lygiai skaitmenų ir toki patį pirmąjį skaitmenį, mažesni yra tie, kurių antrasis skaitmuo mažesnis, ir t. t.

a) Iš $2019 > 9 \cdot 224$ išplaukia, kad šiūmetis skaičius turi daugiau nei 224 skaitmenis. Jei šiūmetis skaičius turi 225 skaitmenis, tai jo pirmasis skaitmuo yra ne mažesnis nei $2019 - 9 \cdot 224 = 3$. Be to, ši reikšmė pasiekama, tik kai visi kiti 224 skaitmenys yra devynetai. Taip gauname $a_1 = 399 \dots 99$.

b) Iš a) dalies sprendimo išplaukia, kad toliau turime ieškoti šiūmečių skaičių, turinčių 225 skaitmenis ir kurių pirmasis skaitmuo yra 4 (arba, jei tokių nėra, dar didesnių skaičių). Jų ieškome taip: vietoj nežinomų 224 skaitmenų imkime devynetus (didžiausia galima skaitmens reikšmė) ir žiūrėkime, kaip juos galima sumažinti, kad skaitmenų suma taptų 2019. Skaičiuje $499 \dots 99$, kurio skaitmenų suma yra 2020, reikia vieną iš skaitmenų sumažinti vienetu (pakeisti 9 į 8). Taip gautas skaičius tuo mažesnis, kuo toliau į kairę yra skaitmuo 8. Todėl $a_2 = 489 \dots 99$, $a_3 = 498 \dots 99$, ..., $a_{225} = 499 \dots 98$.

Skaičiuje a_{100} aštuonetas yra 100-asis skaitmuo, po kurio eina $225 - 100 = 125$ devynetai. Vadinas, $a_{100} + 1 = 499 \dots 9900 \dots 00$ baigiasi 125 nuliais.

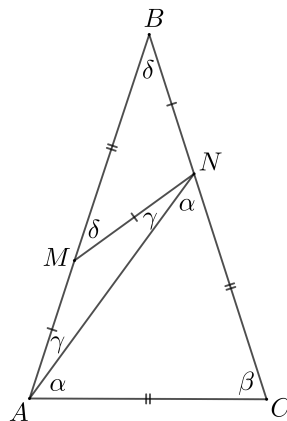
Ats.: a) $4 \cdot 10^{224} - 1 = 399 \dots 99$; b) 125.

3 uždavinys. Trikampio ABC kraštinės AB ir BC lygios. Jose atitinkamai pažymėti tokie taškai M ir N , kad $BN = NM = MA$ ir $BM = AC$. Raskite trikampio ABC kampus.

Sprendimas. Pastebėkime, kad

$$CN = BC - BN = AB - MA = BM = AC.$$

Todėl trikampis ACN lygiašonis – kaip ir trikampiai ABC , AMN , BNM . Šių keturių trikampių kampą prie pagrindo atitinkamai pažymėkime $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ (žr. pav.). Dabar belieka pasinaudoti įvairiais elementariais sąryšiais tarp šių kampų.



Trikampyje ACN turime $\beta = \angle ACN = 180^\circ - 2\alpha$. Trikampyje ABC turime $\delta = \angle ABC = 180^\circ - 2\beta = 4\alpha - 180^\circ$. Trikampyje BNM turime $\angle BNM = 180^\circ - 2\delta = 540^\circ - 8\alpha$. Lygiašonio $\triangle ABC$ kampai BAC ir BCA lygūs: $\beta = \alpha + \gamma$ ir todėl $\gamma = \beta - \alpha = 180^\circ - 3\alpha$. Ištiesinį $\angle BNC$ sudaro trys kampai: $180^\circ = \alpha + \gamma + \angle BNM = 720^\circ - 10\alpha$. Vadinasi,

$$10\alpha = 540^\circ, \quad \alpha = 54^\circ, \quad \beta = 72^\circ, \quad \delta = 36^\circ.$$

Trikampio ABC kampai lygūs $72^\circ, 72^\circ, 36^\circ$.

Ats.: $72^\circ, 72^\circ, 36^\circ$.

4 uždavinys. Natūralųjį skaičių n vadinsime *uždvejinamu*, jei egzistuoja toks natūralusis skaičius a , kad skaičiaus $n \cdot a$ dešimčių (t. y. antrasis nuo galo) skaitmuo yra 2. Keli natūralieji skaičiai nuo 1 iki 999 **nėra** uždvejinami?

Sprendimas. Jei natūraliajam skaičiui n egzistuoja toks natūralusis skaičius b , kad $n \cdot b$ baigiasi skaitmeniu 2, tai n yra uždvejinamas: tereikia imti $a = 10b$, ir tada

$$n \cdot a = (n \cdot b) \cdot 10 = \dots 2 \cdot 10 = \dots 20.$$

Be to, jei skaičiui n egzistuoja toks b , tai ir skaičius $10n$ yra uždvejinamas: jam tereikia imti $a = b$, ir vėl $10n \cdot a = 10nb = \dots 20$.

Skaičiaus b ieškoti yra paprasčiau nei sąlygoje nurodyto skaičiaus a , nes natūraliųjų skaičių sandaugos paskutinis skaitmuo priklauso tik nuo dauginamųjų paskutinių skaitmenų. Pavyzdžiui, padauginus skaičių, kuris baigiasi skaitmeniu 3, iš 4, sandauga visada baigiasi skaitmeniu 2, nes $3 \cdot 4 = 12$. Dėl to visi natūralieji skaičiai, kurie baigiasi skaitmeniu 3, yra uždvejinami. Dėl mūsų pastebėjimo apie skaičių $10n$ uždvejinami yra ir skaičiai, kurie baigiasi skaitmenimis 30. Analogiškai lygybės

$$1 \cdot 2 = 2 \cdot 1 = 2, \quad 3 \cdot 4 = 4 \cdot 3 = 12, \quad 6 \cdot 7 = 7 \cdot 6 = 42, \quad 8 \cdot 9 = 9 \cdot 8 = 72$$

parodo, kad reikiamas b egzistuoja visiems natūraliesiems skaičiams, kurie baigiasi skaitmeniu 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9: atitinkamai galima imti $b = 2, 1, 4, 3, 7, 6, 9, 8$. Vadinasi, visi natūralieji skaičiai, kurie nesibaigia skaitmeniu 0 arba 5, yra uždvejinami. Taip pat dėl to visi skaičiai, kurie baigiasi nuliu, bet ne skaitmenimis 50 arba 00, yra uždvejinami.

Jei $n = \dots 5$, tai n nelyginis ir dalijasi iš 5. Tada skaičius $5n$ nelyginis ir dalijasi iš 25. Skaičiai, kurie dalijasi iš 25, baigiasi skaitmenimis 25, 50, 75 arba 00. Todėl $5n = \dots 25$ arba $5n = \dots 75$. Antruoju atveju

$$15n = 5n + 5n + 5n = \dots 75 + \dots 75 + \dots 75 = \dots 25.$$

Taigi bet kuris $n = \dots 5$ yra uždvejinamas: galime imti $a = 5$ arba $a = 15$.

Mums liko skaičiai, kurie baigiasi skaitmenimis 50 arba 00, t. y. skaičiai, kurie dalijasi iš 50. Jei n dalijasi iš 50, tai ir $n \cdot a$ dalijasi iš 50 (bet kokiam natūraliajam a). Bet tada $n \cdot a = \dots 50$ arba $\dots 00$, t. y. dešimčių skaitmuo lygus 0 arba 5, bet niekada 2. Vadinasi, skaičius n nėra uždvejinamas tada ir tik tada, kai dalijasi iš 50.

Nuo 1 iki 999 yra 19 skaičių, kurie dalijasi iš 50: tai 50, 100, 150, ..., 900, 950 = 50 · 19.

Ats.: 19.

5 uždavinys. Raskite visus lygčių sistemos

$$\begin{cases} 2x + 3\{y\} = -4,5, \\ 6\{x\} + 7y = 8,9 \end{cases}$$

realiuosius sprendinius (x, y) .

Pastaba. Kiekvienam realiajam skaičiui a didžiausias sveikasis skaičius, neviršijantis a , vadinamas skaičiaus a sveikąja dalimi ir žymimas $[a]$, o skaičius $a - [a]$ vadinamas skaičiaus a trupmenine dalimi ir žymimas $\{a\}$.

Sprendimas. Iš sveikosios dalies apibrėžimo išplaukia, kad visada $[a] \leq a < [a] + 1$ ir todėl $0 \leq \{a\} < 1$. Pertvarkykime pirmąją sistemos lygtį:

$$2([x] + \{x\}) + 3\{y\} = -4,5, \quad 2\{x\} + 3\{y\} = -4,5 - 2[x].$$

Kadangi $0 \leq 2\{x\} + 3\{y\} < 2 + 3 = 5$, o skaičius $[x]$ sveikasis, tai gali tikti tik $[x] = -3$ arba -4 . (Kitais atvejais $-4,5 - 2[x]$ reikšmė arba didesnė už 5, arba mažesnė už 0.) Atitinkamai $2\{x\} + 3\{y\} = 1,5$ arba $3,5$.

Analogiškai pertvarkome antrąją sistemos lygtį:

$$6\{x\} + 7\{y\} = 8,9 - 7[y].$$

Kadangi $0 \leq 6\{x\} + 7\{y\} < 6 + 7 = 13$, o skaičius $[y]$ sveikasis, tai gali tikti tik $[y] = 1$ arba 0. Atitinkamai $6\{x\} + 7\{y\} = 1,9$ arba $8,9$.

Pažymėkime $z = 2\{x\} + 3\{y\}$, $t = 6\{x\} + 7\{y\}$. Tada $3z - t = 2\{y\}$ ir $3t - 7z = 4\{x\}$. Kai $t = 1,9$, tai $4\{x\} < 3 \cdot 2 - 7 \cdot 1 < 0$. Todėl lieka atvejis $t = 8,9$ ir $[y] = 0$. Jei $z = 1,5$, tai $2\{y\} = 4,5 - t < 0$. Lieka atvejis $z = 3,5$ ir $[x] = -4$. Randame

$$\{y\} = (3z - t) : 2 = (10,5 - 8,9) : 2 = 0,8, \quad y = [y] + \{y\} = 0,8,$$

$$\{x\} = (z - 3\{y\}) : 2 = (3,5 - 2,4) : 2 = 0,55, \quad x = [x] + \{x\} = -3,45.$$

Gautasis sprendinys tenkina pradinę sistemą.

Ats.: $(-3,45, 0,8)$.

Lietuvos mokinių matematikos olimpiada
Rajono (miesto) etapo užduotys 11 - 12 klasei
2019 m.

1 uždavinys. Lentoje mažėjimo tvarka iš kairės į dešinę užrašyti skaičiai

$$1 + \frac{1}{28}, 1 + \frac{1}{29}, 1 + \frac{1}{30}, \dots, 1 + \frac{1}{2019}$$

(t. y. k -tasis užrašytas skaičius lygus $1 + \frac{1}{27+k}$). Vienu ėjimu leidžiama nutrinti kairiausiąjį ir dešiniausiąjį tuo metu lentoje užrašytus skaičius. Po kiekvieno tokio ėjimo apskaičiuojama lentoje užrašytų skaičių sandauga P .

a) Nustatykite, kokia bus P reikšmė po 4 ir po 228 ėjimų.

b) Kiek skirtingų **natūraliųjų** reikšmių bus įgijusi ši sandauga, prieš nutrinant paskutinius du skaičius?

2 uždavinys. Natūralųjų skaičių vadinsime *šiūmečiu*, jei jo skaitmenų suma lygi 2019. Visus šiūmečius natūraliuosius skaičius išrikiuokime didėjimo tvarka:

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

a) Raskite a_1 ir a_3 .

b) Keliais nuliais baigiasi skaičius $a_{2019} + 1$?

3 uždavinys. Stačiojo trikampio ABC įžambinėje AB pažymėti tokie taškai D ir E , o statinyje BC – toks taškas F , kad atkarpos CD ir FE statmenos atkarpai AB ir $DE = CD$. Raskite kampą CAF .

4 uždavinys. Natūralųjų skaičių vadinsime *suderintu*, jei jis tenkina šias dvi sąlygas: 1) jo visi skaitmenys yra vienetai; 2) jis dalijasi tiek iš 11, tiek iš 41 su liekana 1, o iš 9 – su liekana 7.

a) Kiek skaitmenų turi mažiausias suderintas natūralusis skaičius?

b) Duota, kad kažkokių dviejų suderintų natūraliųjų skaičių skirtumas nesidalija iš natūraliojo skaičiaus $N > 35$. Kokios yra dvi mažiausios galimos N reikšmės?

5 uždavinys. Raskite visus lygčių sistemos

$$\begin{cases} 2x + 3\{y\} = -4,5, \\ 6\{x\} + 7y = 8,9 \end{cases}$$

realiuosius sprendinius (x, y) .

Pastaba. Kiekvienam realiajam skaičiui a didžiausias sveikasis skaičius, neviršijantis a , vadinamas skaičiaus a sveikąja dalimi ir žymimas $[a]$, o skaičius $a - [a]$ vadinamas skaičiaus a trupmenine dalimi ir žymimas $\{a\}$.

2 uždavinys vertinamas 6 taškais, 4 uždavinys – 7 taškais, 1, 3, 5 uždaviniai – 5 taškais.

Lietuvos mokinių matematikos olimpiada
Rajono (miesto) etapo užduočių 11 - 12 klasei sprendimai
2019 m.

1 uždavinys. Lentoje mažėjimo tvarka iš kairės į dešinę užrašyti skaičiai

$$1 + \frac{1}{28}, 1 + \frac{1}{29}, 1 + \frac{1}{30}, \dots, 1 + \frac{1}{2019}$$

(t. y. k -tasis užrašytas skaičius lygus $1 + \frac{1}{27+k}$). Vienu ėjimu leidžiama nutrinti kairiausiasį ir dešiniausiasį tuo metu lentoje užrašytus skaičius. Po kiekvieno tokio ėjimo apskaičiuojama lentoje užrašytų skaičių sandauga P .

- Nustatykite, kokia bus P reikšmė po 4 ir po 228 ėjimų.
- Kiek skirtingų natūraliųjų reikšmių bus įgijusi ši sandauga, prieš nutrinant paskutinius du skaičius?

Sprendimas. Po n ėjimų lentoje bus užrašyti skaičiai

$$1 + \frac{1}{28+n}, \dots, 1 + \frac{1}{2019-n}.$$

Kadangi $1 + \frac{1}{k} = \frac{k+1}{k}$, tai

$$P = \frac{(29+n)(30+n)\dots(2020-n)}{(28+n)(29+n)\dots(2019-n)} = \frac{2020-n}{28+n}.$$

- Kai $n = 4$, tai $P = \frac{2016}{32} = 63$. Kai $n = 228$, tai $P = \frac{1792}{256} = 7$.
- Reikia išsiaiškinti, kada $2020 - n$ dalijasi iš $28 + n$. Taip bus tada ir tik tada, kai $(2020 - n) + (28 + n) = 2048 = 2^{11}$ dalijasi iš $28 + n$. Vadinas, $28 + n$ yra dvejetainio laipsnis. Tinka 5 reikšmės: $n = 2^5 - 28 = 4$, $n = 2^6 - 28 = 36$, $n = 2^7 - 28 = 100$, $n = 2^8 - 28 = 228$, $n = 2^9 - 28 = 484$. O kitas skaičius $n = 2^{10} - 28 = 996$ jau per didelis, nes po tiek ėjimų visi $2019 - 27 = 1992 = 996 \cdot 2$ skaičiai jau bus nutrinti.

Ats.: a) 63 ir 7; b) 5.

2 uždavinys. Natūralųjį skaičių vadinsime šiūmečiu, jei jo skaitmenų suma lygi 2019. Visus šiūmečius natūraliuosius skaičius išrikiuokime didėjimo tvarka:

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

- Raskite a_1 ir a_3 .
- Keliais nuliais baigiasi skaičius $a_{2019} + 1$?

Sprendimas. Mažesni yra tie šiūmečiai skaičiai, kurie turi mažiau skaitmenų. Tarp šiūmečių skaičių, turinčių po lygiai skaitmenų, mažesni yra tie, kurių pirmasis skaitmuo

mažesnis. Tarp šiūmečių skaičių, turinčių po lygiai skaitmenų ir tokį patį pirmąjį skaitmenį, mažesni yra tie, kurių antrasis skaitmuo mažesnis, ir t. t.

a) Iš $2019 > 9 \cdot 224$ išplaukia, kad šiūmetis skaičius turi daugiau nei 224 skaitmenis. Jei šiūmetis skaičius turi 225 skaitmenis, tai jo pirmasis skaitmuo yra ne mažesnis nei $2019 - 9 \cdot 224 = 3$. Be to, ši reikšmė pasiekama, tik kai visi kiti 224 skaitmenys yra devynetai. Taip gauname $a_1 = 399 \dots 99$.

Toliau turime ieškoti šiūmečių skaičių, turinčių 225 skaitmenis ir kurių pirmasis skaitmuo yra 4 (arba, jei tokių nėra, dar didesnių skaičių). Jų ieškokime taip: vietoj nežinomų 224 skaitmenų imkime devynetus (didžiausia galima skaitmens reikšmė) ir žiūrėkime, kaip juos galima sumažinti, kad skaitmenų suma taptų 2019. Skaičiuje $499 \dots 99$, kurio skaitmenų suma yra 2020, reikia vieną iš skaitmenų sumažinti vienetu (pakeisti 9 į 8). Taip gautas skaičius tuo mažesnis, kuo toliau į kairę yra skaitmuo 8. Todėl $a_2 = 489 \dots 99$, $a_3 = 498 \dots 99$, ..., $a_{225} = 499 \dots 98$.

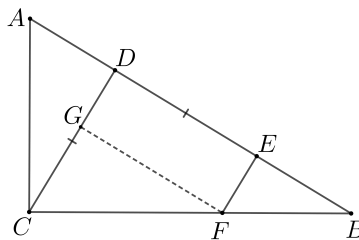
b) Iš a) dalies sprendimo išplaukia, kad toliau turime ieškoti šiūmečių skaičių, turinčių 225 skaitmenis ir kurių pirmasis skaitmuo yra 5. Skaičiaus $599 \dots 99$ skaitmenų suma 2021 reikia sumažinti 2: arba 9 pakeisti į 7, arba 9 ir 9 pakeisti į 8 ir 8.

Pirmiausiai eina skaičius $57 \dots$ ir 223 skaičiai $58 \dots$ (yra 223 būdai pasirinkti antrojo aštuoneto poziciją). Tada skaičius $597 \dots$ ir 222 skaičiai $598 \dots$, skaičius $5997 \dots$ ir 221 skaičius $5998 \dots$. Toliau atitinkamai eina $1 + 220$ skaičių (kurių 5-asis skaitmuo nėra 9), $1 + 219$ skaičių (6-asis skaitmuo nėra 9), $1 + 218$ skaičių (7-asis), $1 + 217$ skaičių (8-asis), $1 + 216$ skaičių (9-asis). Jau turime $225 + 224 + \dots + 217 = 1989$ šiūmečius skaičius. Tada eina $a_{1990} = 5999999997 \dots$ ir 215 skaičių $5999999998 \dots$. Mums reikia $2019 - 1990 = 29$ -ojo iš šių 215-os. Antrasis aštuonetas pirmajame iš 215 skaičių a_{1991} yra $10 + 1 = 11$ -asis skaitmuo ir vis slenka per vieną poziciją į dešinę. Todėl 29-ajame skaičiuje antrasis aštuonetas yra $10 + 29 = 39$ -asis skaitmuo, po kurio eina $225 - 39 = 186$ devynetai. Vadinas, $a_{2019} + 1$ baigiasi 186 nuliais.

Ats.: a) $a_1 = 4 \cdot 10^{224} - 1 = 399 \dots 99$, $a_3 = 499 \cdot 10^{222} - 1 = 49899 \dots 99$; b) 186.

3 uždavinys. Stačiojo trikampio ABC įžambinėje AB pažymėti tokie taškai D ir E , o statinyje BC – toks taškas F , kad atkarpos CD ir FE statmenos atkarpai AB ir $DE = CD$. Raskite kampą CAF .

Pirmas sprendimas. Išveskime statmenį FG iš taško F į atkarpą CD (žr. pav.).



Kadangi tiesės CD ir FE statmenos tiesei AB , tai jos lygiagrečios, o atstumas tarp jų yra bet kurio statmens, išvesto iš vienos tiesės į kitą, ilgis: $FG = ED$. Kadangi

$$\angle FCG = 90^\circ - \angle ACD = 90^\circ - (90^\circ - \angle CAD) = \angle CAD$$

ir $\angle ADC = 90^\circ = \angle CGF$, tai $\triangle ACD \sim \triangle CFG$. Be to, kadangi $FG = ED = CD$, tai trikampiai yra ne tik panašūs, bet ir lygūs. Vadinasi, $AC = CF$, o trikampis ACF yra statusis ir lygiašonis. Tokio trikampio kampas CAF lygus 45° .

Antras sprendimas. Statieji trikampiai ACD ir FBE turi po bendrą smailųjį kampą su trikampiu ABC , todėl visi šie trikampiai turi tokius pačius kampus ir yra tarpusavyje panašūs. Kadangi $CD \parallel FE$, tai pagal Talio teoremą $DE : CF = BE : BF$. Tada

$$DE : CF = BE : BF = CD : CA = DE : CA$$

ir $CF = CA$. Trikampis ACF statusis ir lygiašonis, jo kampas CAF lygus 45° .

Trečias sprendimas. Trikampis CDE yra statusis ir lygiašonis, todėl $\angle CED = 45^\circ$ ir $\angle CEF = 90^\circ - \angle CED = 45^\circ$. Kadangi $\angle ACF + \angle AEF = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, tai apie keturkampį $ACFE$ galima apibrėžti apskritimą. Įbrėžtiniai kampai CAF ir CEF remiasi į tą patį to apskritimo lanką, ir $\angle CAF = \angle CEF = 45^\circ$.

Ats.: 45° .

4 uždavinys. Natūralųjį skaičių vadinsime suderintu, jei jis tenkina šias dvi sąlygas: 1) jo visi skaitmenys yra vienetai; 2) jis dalijasi tiek iš 11, tiek iš 41 su liekana 1, o iš 9 – su liekana 7.

a) Kiek skaitmenų turi mažiausias suderintas natūralusis skaičius?

b) Duota, kad kažkokių dviejų suderintų natūraliųjų skaičių skirtumas nesidalija iš natūraliojo skaičiaus $N > 35$. Kokios yra dvi mažiausios galimos N reikšmės?

Sprendimas. Skaičių, tenkinanti 1) sąlygą ir turinti n skaitmenų, pažymėkime U_n .

a) Remiantis 2) sąlyga, skaičius $U_n - 1 = 10U_{n-1}$ turi dalytis iš 11 ir iš 41. Taip bus, jei U_{n-1} dalijasi iš 11 ir iš 41.

Pastebėkime (pavyzdžiui, dalydami 111... iš 41 kampu), kad U_1, U_2, U_3 ir U_4 iš 41 nesidalija, o $U_5 = 41 \cdot 271$ dalijasi. Jei natūralusis skaičius m dalijasi iš 5, tai $U_m = U_5 \cdot 100001 \dots 00001$ dalijasi iš 41. Jei $m > 5$ dalijasi iš 5 su liekana $r \neq 0$, tai $U_m = \overline{U_{m-r}U_r} = U_{m-r} \cdot 10^r + U_r$, kur U_{m-r} iš 41 dalijasi, o U_r iš 41 nesidalija. Vadinasi, U_n dalijasi iš 41 su liekana 1 tada ir tik tada, kai $n - 1$ dalijasi iš 5.

Remdamiesi panašia logika, bet paprasčiau gauname, kad U_n dalijasi iš 11 su liekana 1 tada ir tik tada, kai $n - 1$ dalijasi iš 2. Panašiai galima ištirti ir dalumą iš 9. Remiantis dalumo iš 9 požymiu, U_m dalijasi iš 9, kai m dalijasi iš 9. Galima patikrinti, kad tarp skaičių U_1, U_2, \dots, U_8 iš 9 su liekana 7 dalijasi tik U_7 . Jei $m > 9$ dalijasi iš 9 su liekana $r \neq 0$, tai $U_m = \overline{U_{m-r}U_r} = U_{m-r} \cdot 10^r + U_r$, kur U_{m-r} dalijasi iš 9, o U_r dalijasi iš 9

su liekana 7, tik jei $r = 7$. Vietoj viso to galima pasinaudoti ir tokia išplėstine dalumo požymio formuluote: natūralusis skaičius dalijasi iš 9 su tokia liekana, su kuria iš 9 dalijasi jo skaitmenų suma. Bet kuriuo atveju jau galime performuluoti 2) sąlygą: $n - 1$ turi dalytis iš 2 ir iš 5 be liekanos, o $n -$ dalytis iš 9 su liekana 7.

Belieka rasti mažiausią n , tenkinantį pakeistąją 2) sąlygą. $n - 1$ dalijasi iš 2 ir iš 5, kai dalijasi iš $2 \cdot 5 = 10$, t. y. kai n baigiasi vienetu. Tikrindami iš eilės skaičius 1, 11, 21, ..., randame mažiausią, kuris dalijasi iš 9 su liekana 7. Tai skaičius 61.

b) Du suderintus skaičius pažymėkime U_m ir U_n . Galime laikyti, kad $m > n$. Tada $A = U_m - U_n = U_{m-n} \cdot 10^n$ nesidalija iš N , bet dalijasi iš 11, 41 ir 9. Iš a) dalies sprendimo matome, kad $m - n$ turi dalytis iš 2, 5 ir 9, t. y. iš 90. Be to, $n \geq 61$. Tada A dalijasi iš 2, 4, 8, 5, 3 ir 9.

Tarkime, kad skaičius $p \neq 2, 3, 5$ yra pirminis. Iš Mažosios Ferma teoremos išplaukia, kad skaičius $9U_{p-1} = 10^{p-1} - 1$, todėl ir U_{p-1} dalijasi iš p . Jei k dalijasi iš $p - 1$, tai U_k dalijasi iš U_{p-1} , todėl ir iš p . Kadangi $m - n$ dalijasi iš 6 ir 18, tai A dalijasi iš 7 ir 19. Galima patikrinti, kad U_6 , todėl ir U_{m-n} bei A dalijasi iš 13. Analogiškai U_3 , todėl ir A dalijasi iš 37. Taip pat gauname, kad U_{42} ir U_{84} dalijasi iš 43, o U_{22} ir U_{88} – iš 23.

Jau turime, kad A dalijasi iš $36 = 4 \cdot 9$, 37 , $38 = 2 \cdot 19$, $39 = 3 \cdot 13$, $40 = 5 \cdot 8$, 41 , $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$, $44 = 4 \cdot 11$, $45 = 5 \cdot 9$. Taigi tarp 35 ir 47 lieka tik 2 natūralieji skaičiai, iš kurių A galimai nesidalija: 43 ir 46.

Remiantis a) dalies sprendimu, galima imti $n = 61$ ir $m = 90 + 61 = 151$. Tada $A = U_{90} \cdot 10^{61}$. Kadangi $U_6 = 111 \cdot 1001$ nesidalija iš 43, tai skaičiai $U_{90} = U_{84} \cdot 10^6 + U_6$ ir A nesidalija iš 43. Analogiškai skaičiai $U_{90} = U_{88} \cdot 100 + 11$ ir A nesidalija iš 23 nei iš 46.

Ats.: a) 61; b) 43 ir 46.

5 uždavinys. Raskite visus lygčių sistemos

$$\begin{cases} 2x + 3\{y\} = -4,5, \\ 6\{x\} + 7y = 8,9 \end{cases}$$

realiuosius sprendinius (x, y) .

Pastaba. Kiekvienam realiajam skaičiui a didžiausias sveikasis skaičius, neviršijantis a , vadinamas skaičiaus a sveikąja dalimi ir žymimas $[a]$, o skaičius $a - [a]$ vadinamas skaičiaus a trupmenine dalimi ir žymimas $\{a\}$.

Sprendimas. Iš sveikosios dalies apibrėžimo išplaukia, kad visada $[a] \leq a < [a] + 1$ ir todėl $0 \leq \{a\} < 1$. Pertvarkykime pirmąją sistemos lygtį:

$$2([x] + \{x\}) + 3\{y\} = -4,5, \quad 2\{x\} + 3\{y\} = -4,5 - 2[x].$$

Kadangi $0 \leq 2\{x\} + 3\{y\} < 2 + 3 = 5$, o skaičius $[x]$ sveikasis, tai gali tikt tik $[x] = -3$ arba -4 . (Kitais atvejais $-4,5 - 2[x]$ reikšmė arba didesnė už 5, arba mažesnė už 0.) Atitinkamai $2\{x\} + 3\{y\} = 1,5$ arba $3,5$.

Analogiškai pertvarkome antrąją sistemos lygtį:

$$6\{x\} + 7\{y\} = 8,9 - 7[y].$$

Kadangi $0 \leq 6\{x\} + 7\{y\} < 6 + 7 = 13$, o skaičius $[y]$ sveikasis, tai gali tikt tik $[y] = 1$ arba 0 . Atitinkamai $6\{x\} + 7\{y\} = 1,9$ arba $8,9$.

Pažymėkime $z = 2\{x\} + 3\{y\}$, $t = 6\{x\} + 7\{y\}$. Tada $3z - t = 2\{y\}$ ir $3t - 7z = 4\{x\}$. Kai $t = 1,9$, tai $4\{x\} < 3 \cdot 2 - 7 \cdot 1 < 0$. Todėl lieka atvejis $t = 8,9$ ir $[y] = 0$. Jei $z = 1,5$, tai $2\{y\} = 4,5 - t < 0$. Lieka atvejis $z = 3,5$ ir $[x] = -4$. Randame

$$\{y\} = (3z - t) : 2 = (10,5 - 8,9) : 2 = 0,8, \quad y = [y] + \{y\} = 0,8,$$

$$\{x\} = (z - 3\{y\}) : 2 = (3,5 - 2,4) : 2 = 0,55, \quad x = [x] + \{x\} = -3,45.$$

Gautasis sprendinys tenkina pradinę sistemą.

Ats.: $(-3,45, 0,8)$.