67-osios Lietuvos mokinių fizikos olimpiados rajono–miesto turas (2019 m.)
11 klasė

1. Žmogus, prisirišęs prie guminio lyno, kurio kitas galas pritvirtintas prie tilto virš upės, šoka nuo tilto. Neištempto lyno ilgis l_0, žmogaus masė m, o tilto aukštis H. 1) Koks turi būti lyno standumas k, kad žmogus nepasiektų vandens paviršiaus? 2) Kokį didžiausią greitį v gali pasiekti žmogus šuolio metu? 3) Kokiame tuo momentu aukštyje h virš vandens yra žmogus? *Pastaba:* Pailgėjusio dydžiu x tempiamo guminio lyno tempimo jėga $F = -kx$, o sukaupta tamprumo energija $E = \dfrac{kx^2}{2}$. **(10 taškų)**

Sprendimas

1) Arčiausiai prie vandens paviršiaus žmogus priartėja, kai visa jo potencinė energija ant tilto virsta guminio lyno tamprumo energija prie pat vandens paviršiaus, o žmogaus greitis lygus 0, t.y. ribiniu atveju

$$mgH = \frac{k\Delta l^2}{2}. \qquad \text{(2 taškai)}$$

Čia lyno pailgėjimas $\Delta l = H - l_0$. Taigi, lyno standumas turi būti

$$k > \frac{2mgH}{(h - l_0)^2}. \qquad \text{(1 taškas)}$$

2) Žmogaus, nušokusio nuo tilto, greitis didėja iki to momento, kol jo pagreitis tampa 0, t.y.iki to momento, kai lynas išsitempia dydžiu Δl_1 tiek, kad jo tamprumo jėga tampa lygi jo sunkiui, t.y. $k\Delta l_1 = mg$. (2 taškai)

Užrašome šiam momentui mechaninės energijos tvermės dėsnį:

$$mg(l_0 + \Delta l_1) = \frac{k\Delta l_1^2}{2} + \frac{mv^2}{2}. \qquad \text{(2 taškai)}$$

Tuo būdu, išreiškę greitį v ir įrašę Δl_1 randame $v = \sqrt{g\left(2l + \frac{m}{k}\right)}$. (2 taškai)

3) Tuo metu žmogus yra virš vandens paviršiaus aukštyje

$$h = H - l_0 - \frac{mg}{k} \qquad \text{(1 taškas)}$$

2. Nedidelis ritinys, kurio pagrindo skersmuo $d = 1{,}2\ \text{cm}$, o aukštinė $h = 5{,}0\ \text{cm}$, pagrindu pastatytas ant didelio horizontalaus disko, galinčio suktis apie vertikalią ašį, einančią per disko centrą, atstumu $R = 1{,}0\ \text{m}$ nuo sukimosi ašies. Trinties koeficientas tarp ritinio ir disko $\mu = 0{,}30$. Kokiu kampiniu greičiu ω turi suktis diskas, kad ritinys disko atžvilgiu pajudėtų?

(10 taškų)

Sprendimas

Pirmiausia suraskime kampinį greitį ω', kad ritinys pradėtų slysti, išlikdamas vertikalus. Tokiu atveju trinties jėga turi vaidinti įcentrinės jėgos vaidmenį. Tada ritinio linijiniam greičiui v ir šiuo atveju didžiausiai galimai trinties jėgai

$$\frac{mv^2}{R} = \mu mg .$$

(2 taškai)

Pasinaudoję ryšiu $v = \omega' R$,

(1 taškas)

randame $\omega' = \sqrt{\dfrac{\mu g}{R}} = \sqrt{\dfrac{0{,}30 \cdot 9{,}81}{1{,}0}} \approx 1{,}72\ \text{s}^{-1}$. (1 taškas)

Taigi, ritinys pradėtų slysti disku, kai pasiekiamas $\omega = 1{,}72\ \text{s}^{-1}$ kampinis greitis.

(1 taškas)

Tačiau gali būti situacija, kai ritinys apvirs. Randame kampinį greitį ω'', kurį viršijus ritinys apvirstų. Tuomet atramos jėgos momentas (jis ir sukelia įcentrinės jėgos momentą) turi viršyti sunkio jėgos momentą ritinio krašto atžvilgiu:

$$m\omega''^2 R \cdot \frac{h}{2} = mg \cdot \frac{d}{2} .$$

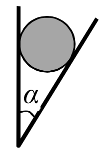
(2 taškai)

Iš čia $\omega'' = \sqrt{\dfrac{dg}{Rh}} = \sqrt{\dfrac{1{,}2 \cdot 9{,}81}{1{,}0 \cdot 5{,}0}} \approx 1{,}53\ \text{s}^{-1}$. (1 taškas)

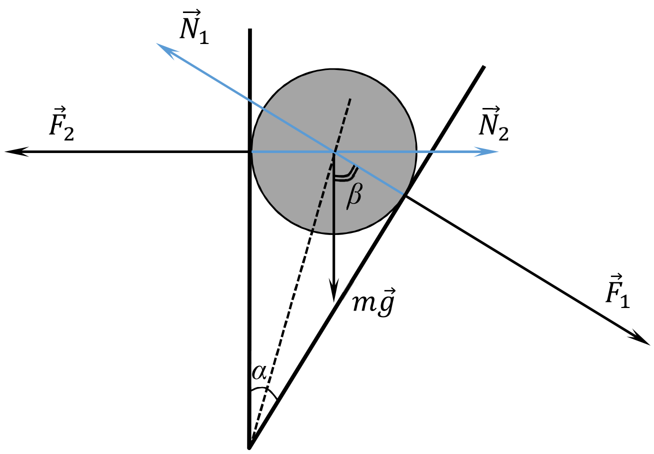
Tuo būdu, pradedant suktis diskui (didėjant jo kampiniam greičiui) duotiems sąlygoje parametrams pirmiausia pasiekiamas kampinis greitis $\omega = \omega'' \approx 1{,}53\ \text{s}^{-1}$, ir diskas pajudės, apvirsdamas pasiekęs būtent šį kampinį greitį. Taigi, $\omega = 1{,}53\ \text{s}^{-1}$

(2 taškai)

3. Tarp dviejų plokštumų, tarpusavyje sudarančių kampą α, padėtas masės m spindulio R rutulys. Apskaičiuokite jėgą, kuria rutulys slegia vertikalią sienelę. Trinties tarp rutulio ir sienelių nepaisyti. **(10 taškų)**



Sprendimas.



Braižome brėžinį. (2 taškai)

Rutulį veikia sunkio jėga $m\vec{g}$ bei abiejų sienelių reakcijos jėgos $\vec{N}_1$ ir $\vec{N}_2$. Kadangi rutulys nejuda, turime $\vec{N}_1 + \vec{N}_2 + m\vec{g} = 0$.

Atitinkamai, rutulys slegia sieneles jėgomis $\vec{F}_1 = -\vec{N}_1$ bei $\vec{F}_2 = -\vec{N}_2$. (2 taškai)

Suprojektavę jėgas į vertikalę bei horizontalę ašis, gauname:
$mg = F_1 \cos\beta,\ F_2 = F_1 \sin\beta$. (3 taškai)

Iš čia gauname, jog vertikalią sienelę rutulys veikia jėga $F_2 = mg\tan\beta$. (1 taškas)

Iš brėžinio matome, jog kampas $\beta = 180° - 90° - \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\alpha = 90° - \alpha$. (1 taškas)

Taigi gauname $F_2 = mg\tan(90° - \alpha) = mg\cot\alpha$. (1 taškas)

4. Du 1 cm spindulio medinis ir plieninis rutuliukai buvo sujungti ilgu siūlu ir įmesti į didelį glicerino rezervuarą. Žinodami, jog skystyje greičiu v judantį spindulio r rutuliuką veikia pasipriešinimo jėga $F = 6\pi\eta r v$ (čia η – skysčio klampumo koeficientas), nustatykite nusistovėjusį rutuliukų grimzdimo greitį. Kokia yra rutuliukus jungiančio siūlo įtempimo jėga? Glicerino tankis $\rho_g = 1300$ kg/m^3, medžio tankis $\rho_m = 500$ kg/m^3, plieno tankis $\rho_p = 7800$ kg/m^3, glicerino klampumo koeficientas $\eta = 1{,}5$ Pa·s. **(10 taškų)**

Sprendimas.

Kadangi plieninio rutuliuko masė yra didesnė nei medinio, ilgainiui abu rutuliukai judės ta pačia vertikalia tiese. Kiekvieną rutuliuką veikia jo sunkio jėga mg, Archimedo jėga F_A, skysčio pasipriešinimo jėga F bei siūlo įtempimo jėga T. (1 taškas)

Apatiniam (plieniniam) rutuliukui iš I Niutono dėsnio turime:

$m_p g = F_A + F + T,$ (1)

čia $m_p = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_p,\ F_A = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_g g,\ F = 6\pi\eta r v$. Taigi (1) lygtį galime perrašyti taip:

$\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_p g = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_g g + 6\pi\eta r v + T.$ (2) (3 taškai)

Analogiškai viršutiniam (mediniam) rutuliukui gauname:

$\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_m g = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_g g + 6\pi\eta r v - T.$ (3) (1 taškas)

Sudėję (2) ir (3) lygtis, gauname:

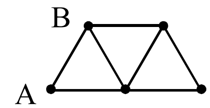
$$12\pi\eta r v = \frac{4}{3}\pi r^3 g\left(\rho_p + \rho_m - 2\rho_g\right) \quad \Rightarrow \quad v = \frac{r^2 g}{9\eta}\left(\rho_p + \rho_m - 2\rho_g\right) \approx 0{,}41 \text{ m/s}.$$

(3 taškai)

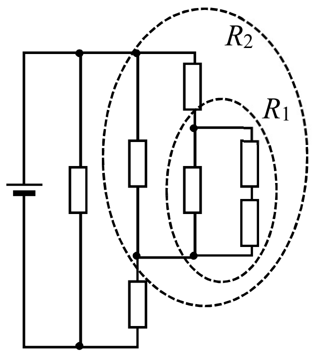
Kita vertus, iš (2) lygties atėmę (3), gauname:

$T = \frac{2}{3}\pi r^3 g\left(\rho_p - \rho_m\right) \approx 0{,}15$ N. (2 taškai)

5. $R = 70\ \Omega$ varžos viela buvo supjaustyta į 7 vienodo ilgio gabaliukus, kurie buvo sujungti į pav. parodytą karkasą. Apskaičiuokite, kiek šilumos išsiskirs šiame karkase per 1 min. prie taškų A ir B prijungus $U = 1{,}3$ V elektrovaros šaltinį. **(10 taškų)**



Sprendimas.



Grandinę galima perbraižyti patogesniu pavidalu – taip aiškiai matysime varžų nuoseklų ir lygiagretų jungimus. Čia rezistoriai atitinka vieno vielos gabaliuko varžą $r = \frac{R}{7}$. Tada nesunkiai galime suskaičiuoti (žiūr. brėž.) (2 taškai)

$$R_1 = \frac{2r \cdot r}{2r + r} = \frac{2}{3} r .$$

$$R_2 = \frac{r \cdot (r + R_1)}{r + r + R_1} = \frac{5}{8} r$$

Galiausiai visa varža $R_3 = \frac{r \cdot (r + R_2)}{r + r + R_2} = \frac{13}{21} r = \frac{13}{147} R$. (5 taškai)

Grandinėje išsiskyrusi šiluma $Q = \frac{U^2 t}{R_3} = \frac{147}{13} \frac{U^2 t}{R} \approx 16{,}4$ J. (3 taškai)