**67-osios Lietuvos mokinių fizikos olimpiados rajono–miesto turas (2019 m.)**

**12 klasė**

**1.** Žmogus, prisirišęs prie guminio lyno, kurio kitas galas pritvirtintas prie tilto virš upės, šoka nuo tilto. Neištempto lyno ilgis $l_0$, žmogaus masė $m$, o tilto aukštis $H$. 1) Koks turi būti lyno standumas $k$, kad žmogus nepasiektų vandens paviršiaus? 2) Kokį didžiausią greitį $v$ gali pasiekti žmogus šuolio metu? 3) Kokiame tuo momentu aukštyje $h$ virš vandens yra žmogus? **(10 taškų)**

**Sprendimas**

1) Arčiausiai prie vandens paviršiaus žmogus priartėja, kai visa jo potencinė energija ant tilto virsta guminio lyno tamprumo energija prie pat vandens paviršiaus, o žmogaus greitis lygus 0, t.y. ribiniu atveju

$$mgH = \frac{k\Delta l^2}{2}. \qquad \text{(2 taškai)}$$

Čia lyno pailgėjimas $\Delta l = H - l_0$ . Taigi, lyno standumas turi būti

$$k > \frac{2mgH}{(h - l_0)^2}. \qquad \text{(1 taškas)}$$

2) Žmogaus, nušokusio nuo tilto, greitis didėja iki to momento, kol jo pagreitis tampa 0, t.y. iki to momento, kai lynas išsitempia dydžiu $\Delta l_1$ tiek, kad jo tamprumo jėga tampa lygi jo sunkiui, t.y. $k\Delta l_1 = mg$ . (2 taškai)

Užrašome šiam momentui mechaninės energijos tvermės dėsnį:

$$mg(l_0 + \Delta l_1) = \frac{k\Delta l_1^2}{2} + \frac{mv^2}{2}. \qquad \text{(2 taškai)}$$

Tuo būdu, išreiškę greitį $v$ ir įrašę $\Delta l_1$ randame $v = \sqrt{g\left(2l + \frac{m}{k}\right)}$. (2 taškai)

3) Tuo metu žmogus yra virš vandens paviršiaus aukštyje

$$h = H - l_0 - \frac{mg}{k} \qquad \text{(1 taškas)}$$

**2.** Planetų tyrimui mokslininkai naudoja kosminį zondą, kurio masė $m = 930$ kg. Vieną paleido skrieti aplink Marsą, o kitą aplink planetą X. Gauti duomenys rodo, kad kosminių zondų greičiai vienodi $v = v_M = v_X = 3{,}40 \cdot 10^3$ m/s. Aplink Marsą besisukančio zondo apskritiminės orbitos periodas $T_M = 1{,}18 \cdot 10^2$ min., tuo tarpu aplink planetą X apskiritimine orbita besisukančio zondo periodas $T_X = 8{,}65 \cdot 10^2$ min. Nustatykite, kiek kartų skiriasi planetų masės, ir apskaičiuokite pilnutinę zondo mechaninę energiją jo orbitoje. Masės *m* zondo, esančio atstumu *r* nuo masės *M* planetos centro, potencinė energija lygi $U(r) = -GMm/r$, čia $G$ – gravitacijos konstanta, o potencinė energija laikoma lygi 0, kai $r \to \infty$. **(10 taškų)**

**Sprendimas**

Užrašome orbitos periodo ir radiuso sąryšį:

$$T = \frac{2\pi R}{v};\ R = \frac{vT}{2\pi}. \qquad (1) \qquad \text{(1 taškas)}$$

Sukamojo judėjimo išilgai orbitos įcentrinė jėga yra gravitacijos jėga:

$$\frac{mv^2}{R} = G\frac{M \cdot m}{R^2}, \qquad (2) \qquad \text{(2 taškas)}$$

čia $G$ – gravitacijos konstanta, $M$ – planetos masė, $m_z$ – zondo masė. Pasinaudodami (1) ir (2) lygtimis užrašome masių išraiškas abiems planetoms:

$$M_M = \frac{v^2 R_M}{G} = \frac{v^3 T_M}{2\pi G};\ M_X = \frac{v^3 T_X}{2\pi G}. \qquad \text{(2 taškai)}$$

Iš čia surandame, kam yra lygus planetų masių santykis:

$$k = \frac{M_X}{M_M} = \frac{T_X}{T_M} = \frac{51900\,\text{s}}{7080\,\text{s}} \approx 7{,}33. \qquad \text{(1 taškas)}$$

Pilnutinė zondo energija susideda iš jo kinetinės ir gravitacinės potencinės energijų:

$$E = E_k + E_p. \qquad \text{(1 taškas)}$$

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GmM}{R} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{Gmv^2R}{RG} = -\frac{1}{2}mv^2. \qquad \text{(2 taškai)}$$

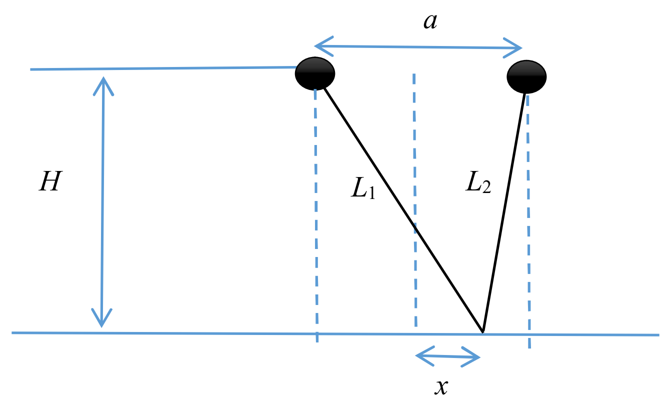
Kadangi zondo masė ir skriejimo greitis vienodi, todėl:

$$E = E_M = E_X = -\frac{1}{2}mv^2 = -5{,}38 \cdot 10^9\ \text{J}. \qquad \text{(1 taškas)}$$

**3.** Patalpoje 20 m aukštyje virš grindų vienas nuo kito 1 m atstumu pakabinti du vienodi garsiakalbiai, iš kurių sklinda vienodos fazės, vienodos amplitudės ir 5 kHz dažnio garso bangos.

Kokiu minimaliu atstumu $x$ nuo vidurinio taško ant grindų lygiagrečiai atkarpai, jungiančiai garsiakalbius, jų skleidžiamas garsas išnyksta? Laikykite, kad garso amplitudė sklindant garsui iki grindų beveik nekinta, grindys lygios, o garso atspindžio nuo lubų nėra. Garso bangų sklidimo greitis lygus 330 m/s. **(10 taškų)**

**Sprendimas**




Garsiausiai garsas girdimas centre horizontaliu atstumu $a/2$ nuo garsiakalbių. (1 taškas)

Minimaliame atstume $x$ (žiūr. brėž.) sklindančių bangų kelių skirtumas turi būti lygus pusei sklindančios bangos ilgio, t.y. $L_1 - L_2 = \dfrac{\lambda}{2}$. (1 taškas)

Surandame iš garsiakalbio sklindančių bangų ilgį:

$$\lambda = \frac{v}{f} = 0{,}066\ \text{m}. \qquad \text{(1 taškas)}$$

Iš geometrinių sąryšių (žiūr. brėž.)

$$L_1 = \sqrt{H^2 + \left(\frac{a}{2} + x\right)^2}, \qquad \text{(1 taškas)}$$

$$L_1 = \sqrt{H^2 + \left(\frac{a}{2} - x\right)^2}. \qquad \text{(1 taškas)}$$

Tada $\sqrt{H^2 + \left(\dfrac{a}{2} + x\right)^2} - \sqrt{H^2 + \left(\dfrac{a}{2} - x\right)^2} = \dfrac{\lambda}{2}$,

Pastebėsime, kad pošaknių reiškiniuose $H^2$ žymiai didesnis už antruosius narius. (1 taškas)

Kairiąją paskutiniosios lygties pusę padauginame ir padaliname iš

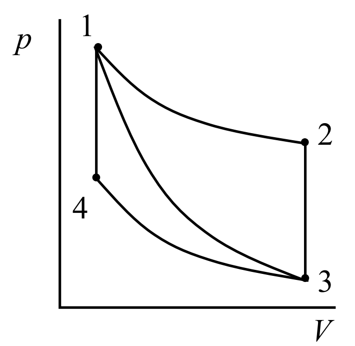
$$\sqrt{H^2 + \left(\frac{a}{2} + x\right)^2} + \sqrt{H^2 + \left(\frac{a}{2} - x\right)^2}\ . \qquad \text{(1 taškas)}$$

Atsižvelgę į tai, kad $H^2$ žymiai didesnis už antruosius pošaknio reiškinių narius, randame

$$\sqrt{H^2 + \left(\frac{a}{2} + x\right)^2} + \sqrt{H^2 + \left(\frac{a}{2} - x\right)^2} \approx 2H\ . \qquad \text{(1 taškas)}$$

Taigi, galiausiai $x \approx \dfrac{H\lambda}{2a} = 0{,}66\ \text{m}$. Poslinkis galimas į abi puses nuo vidurio taško. (2 taškai)

**4 uždavinys.** Iliustracijoje pavaizduota idealios šiluminės mašinos eksperimento metu tirti ciklai. Ciklas 1-2-3-1 susideda iš izotermės 1-2, izochorės 2-3 ir adiabatės 3-1. Šio ciklo naudingumo koeficientas yra lygus $\eta_1$. Ciklą 1-3-4-1 sudaro adiabatė 1-3, izotermė 3-4 ir izochorė 4-1. Šio ciklo naudingumo koeficientas lygus $\eta_2$. Nustatykite šiluminės mašinos naudingumo koeficientą, jei mašina dirba šiais ciklais: 1-2-3-4-1. Šiluminės mašinos darbinė medžiaga yra idealios vienatomės dujos. **(10 taškų)**




**Sprendimas**

Ciklo 1-2-3-1 metu izoterminio proceso metu reikia suteikti energiją, o izochorinio proceso metu – energija išskiriama.

Todėl $\eta_1$:

$$\eta_1 = \frac{Q_{12} - Q_{23}}{Q_{12}}\ . \qquad \text{(1 taškas)}$$

Cikle 1-3-4-1, energija naudojama izochorinio proceso metu ir išskiriama izoterminio proceso metu.

Todėl $\eta_2$:

$$\eta_2 = \frac{Q_{41} - Q_{34}}{Q_{41}}\ . \qquad \text{(1 taškas)}$$

$Q_{23}=Q_{41}=Q$. (1 taškas)

$T_2-T_3=T_1-T_4$ . (1 taškas)

Didžiojo ciklo naudingumo koeficientas:

$$\eta = \frac{A}{Q_{\text{suteiktas}}}.$$ (1 taškas)

$Q_{\text{suteiktas}}=Q_{12}+Q_{41}$ . (1 taškas)

$A=A_{12}-A_{34}=Q_{12}-Q_{34}$ . (1 taškas)

$Q_{12}=Q_{23}/(1-\eta_1)=Q/(1-\eta_1)$. (1 taškas)

$Q_{34}=Q_{41}(1-\eta_2)=Q(1-\eta_2)$ . (1 taškas)

Įrašę į pilno ciklo naudingumo koeficiento išraišką ir pertvarkę gauname:

$$\eta = \frac{\frac{Q}{1-\eta_1} - Q(1-\eta_2)}{\frac{Q}{1-\eta_1} + Q} = \frac{\eta_1 + \eta_2 - \eta_1\eta_2}{2-\eta_1}.$$ (1 taškas)

**5.** Dvi ritės, kurių masės $m_1$ = 450 g ir $m_2$ = 200 g, yra susuktos iš varinės vielos. Apskaičiuokite, kiek kartų skiriasi vielos ilgis ir skersmuo ritėse, jeigu jos abi turi vienodą varžą $R$. **(10 taškų)**

**Sprendimas**

Ieškomi dydžiai yra vielos ilgių santykis $l_{\text{sant.}} = \frac{l_1}{l_2}$ ir vielos skerspjūvių santykis $d_{\text{sant.}} = \frac{d_1}{d_2}$.

Žinome, kad $R = \sigma \frac{l}{S}$, $V = \frac{m}{\rho}$, o $V = S \cdot l$. (3 taškai)

Čia $S$ – vielos skerspjūvis, $\rho$ – vario tankis, $\sigma$ – jo savitoji varža.

Tada $R = \frac{\sigma \cdot l^2 \cdot \rho}{m}$. (1 taškas)

Todėl vielos ilgis ritėje bendru atveju $l = \sqrt{\frac{R \cdot m}{\sigma \cdot \rho}}$. (1 taškas)

Kadangi $R = R_1 = R_2$, $\rho = \rho_1 = \rho_2$ ir $\sigma = \sigma_1 = \sigma_2$, užrašome ilgių santykio formulę pagal turimas išraiškas ir ją suprastinę gauname: $l_{\text{sant.}} = \dfrac{l_1}{l_2} = \sqrt{\dfrac{R \cdot m_1}{\sigma \cdot \rho} \cdot \dfrac{\sigma \cdot \rho}{R \cdot m_2}} = \sqrt{\dfrac{m_1}{m_2}}$. (1 taškas)

Vielos skerspjūvio plotas $S = \pi \cdot r^2$, čia spindulys $r = \sqrt{S / \pi}$. (1 taškas)

Taigi vielos skersmuo bendru atveju $d = 2\sqrt{\dfrac{S}{\pi}} = 2\sqrt{\dfrac{m}{\rho \cdot l \cdot \pi}}$. (1 taškas)

Gauname, kad $d_{\text{sant.}} = \dfrac{d_1}{d_2} = \sqrt{\dfrac{m_1 \cdot l_2}{l_1 \cdot m_2}} = \sqrt{\dfrac{m_1}{m_2 \cdot l_{\text{sant.}}}} = \sqrt{l_{\text{sant.}}} = \sqrt[4]{\dfrac{m_1}{m_2}}$. (1 taškas)

Taigi, galiausiai randame

$l_{\text{sant.}} = 1{,}50$, $d_{\text{sant.}} = 1{,}22$.